Б.А.Волынский

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Б. А. ВОЛЫНСКИЙ

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Под редакцией
Д. Н. ПОНОМАРЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

54
В 70
УДК 514

АННОТАЦИЯ

В книге рассматриваются вопросы геометрии на поверхности сферы, сферические двуугольники и треугольники, а также соотношения между основными элементами сферических треугольников. Выводятся формулы, связывающие стороны и углы сферических треугольников, и приводятся способы решения прямоугольных, косоугольных и узких сферических треугольников.

Книга представляет собой учебное пособие для лиц, изучающих астрономию, геодезию и маркшейдерское дело, методическое пособие для преподавателей астрономии, а также может служить целям справочно-прикладного характера при вычислительных работах по астрономии.

В $\frac{20203-088}{053(02)-77}$ 25-77

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1977.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5
Введение. Этапы развития сферической тригонометрии 7

Глава I
Элементы геометрии на сфере 11

§ 1. Сведения из геометрии сферы 11
§ 2. Дуги и углы на сфере 17
§ 3. Измерение дуг и центральных углов 22

Глава II
Свойства сферического треугольника 25

§ 4. Сферические треугольники. Свойства сторон и углов сферического треугольника 25
§ 5. Полярные сферические треугольники 30
§ 6. Соотношения между сторонами и углами сферического треугольника 34
§ 7. Равенство и симметрия сферических треугольников 38

Глава III
Основные формулы сферической тригонометрии . . . 43

§ 8. Формулы косинусов сторон и углов 43
§ 9. Формулы синусов 48
§ 10. Формулы пяти и четырех элементов 52
§ 11. Формулы половинных углов и сторон 55
§ 12. Формулы Деламбра и аналогии Непера . . . 60
§ 13. Прямоугольные и прямосторонние сферические треугольники 64
§ 14. Площадь сферического треугольника 69
§ 15. Узкие и малые сферические треугольники . . . 75
§ 16. Дифференциальные формулы сферической тригонометрии 81

Глава IV

Решение сферического треугольника 85

§ 17. Общие замечания о решении сферического треугольника 85
§ 18. Элементы вычислительной техники 90
§ 19. Приближенные решения сферического треугольника 92
§ 20. Общие случаи решения сферического треугольника 106
§ 21. Другие способы решения косоугольного сферического треугольника 118
§ 22. Решение прямоугольного сферического треугольника 122
§ 23. Построение треугольников на сфере 129

Задачи и упражнения 132

Литература 135

Приложение. Стереографическая сетка Вульфа (вкладка)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Без знания основ сферической тригонометрии невозможно решить многие задачи практической и сферической астрономии, задачи геодезии и картографии. Поэтому в большинстве учебников и других книг по этим предметам приводятся наиболее употребительные формулы сферической тригонометрии, а иногда и вывод этих формул. С другой стороны, некоторые задачи требуют более углубленного знания сферической тригонометрии.

Цель настоящей книги — дать более подробное изложение предмета и шире осветить общие вопросы его применения.

Книги по сферической тригонометрии издавались и раньше [1]—[8], но последняя из них вышла в свет в 1948 г. Эти книги не только полностью отсутствуют в продаже, но и являются редкостью во многих библиотеках. Кроме того, во второй половине XX в. существенные изменения претерпело практическое приложение сферической тригонометрии. Все это вызвало необходимость в настоящем издании.

К глубокому сожалению, во время подготовки рукописи к печати Борис Алексеевич Волынский скончался, и завершение работы легло на Д. Н. Пономарева, которым написаны параграфы 2, 3, 17—23, а также часть параграфов 6 и 15.

В то время как сам предмет сферической тригонометрии почти не претерпел изменений, практическое решение задач сферической тригонометрии значительно изменилось: если в первой половине XX в. все вычисления выполнялись с помощью логарифмов, то в наше время никто ими не пользуется. Все вычисления ведутся с помощью электронных счетных машин, как кла-

вишных, так и быстродействующих ЭВМ, либо, в крайнем случае, с помощью арифмометров. Это повлекло за собой изменение вычислительных схем и вида формул, выбранных для определения того или иного элемента сферического треугольника. Поскольку все упомянутые книги по сферической тригонометрии основное внимание обращали на вычисления с логарифмами и на приведение формул к виду, удобному для логарифмирования, автор и редактор сочли целесообразным сосредоточить все внимание на вычислениях с помощью электронных клавишных машин или арифмометров. Алгоритмы и формулы, приведенные в книге, вполне пригодны для программирования вычислений на быстродействующих ЭВМ.

Другое отличие предлагаемой книги заключается в следующем. Авторы наиболее употребительных учебников по сферической тригонометрии [7], [8] излагают только вопросы вычисления точного значения элементов сферических треугольников, хотя во многих практических случаях требуется приближенное или быстрое определение этих элементов. Поэтому в книгу включены описания приближенных методов решения сферических треугольников (с точностью 1°—2°) с помощью стереографической сетки и построения сферических треугольников на сфере.

Поскольку предметом изложения является собственно сферическая тригонометрия, конкретные задачи той или иной отрасли науки (например, перевод систем координат, определение моментов и точек восхода и захода, определение угловых расстояний между пунктами на земном шаре и т. п.) не рассматривались. Но читатель, пользуясь общими приемами, изложенными в книге, может сам решить ту или иную частную задачу. Поскольку задачи сферической тригонометрии носят общий характер и переходят из книги в книгу, автор счел возможным привести в качестве задач и упражнений несколько примеров, уже встречавшихся в литературе [1]—[10].

Большую помощь при подготовке рукописи к изданию оказал проф. Е. А. Гребеников.

ВВЕДЕНИЕ

Этапы развития сферической тригонометрии

Сферическая тригонометрия есть раздел сферической геометрии, в котором изучаются метрические свойства сферических треугольников и методы их решения. Сферический треугольник является элементарной фигурой, к которой приводится сферический многоугольник разбиением его на части.

Сферическая тригонометрия возникла и развилась из потребностей астрономии, частью которой она первоначально и была в науке древности и средневековья. Новый стимул ее развития появился в XVII в. в связи с запросами мореплавания и задачами геодезии и картографии.

Изучая видимые движения небесных светил, астрономы древности рассматривали их происходящими на небесной сфере (что в качестве методического приема сохраняется и в наше время), окружающей Землю и существующей в действительности. Древнегреческий математик Евдокс Книдский (IV в. до н. э.) разложил наблюдаемые движения Солнца, Луны, планет и звезд на простейшие составляющие и качественно представил их кинематику с помощью 27 концентрических сфер, равномерно вращающихся вокруг осей, проходящих через центр Земли и пересекающихся под разными углами друг с другом.

Великий астроном древности Гиппарх (II в. до н. э) в своем трактате «Феномена» одним из первых положил начало учению о сфере, рассмотрев замечательные точки и круги небесной сферы, а также составив таблицу величин хорд окружности (по современной терминологии — удвоенных синусов), необходимых для выполнения чи-

сленных расчетов на сфере. Менелай Александрийский (I в. н. э.) в своих книгах «О вычислении хорд» (которая до нас не дошла) и «Сферика» рассматривает предмет сферической тригонометрии и, в частности, вопросы о равенстве и неравенстве углов и сторон в одном или двух сферических треугольниках столь же подробно, как это делает Евклид для плоских треугольников. Клавдий Птолемей (II в. н. э.) в известном труде «Альмагест» дает доказательство нескольких теорем о сферических треугольниках и приводит новую таблицу хорд окружности, вычисленную через 0°,5 центрального угла в интервале от 0° до 180°, величины которых представлены в 60-х долях диаметра круга. Но здесь и заканчивается развитие сферической тригонометрии в античной науке.

В средние века ведущая роль в развитии точных наук перешла к арабским ученым. Багдадский математик Аль Баттани (850—929) уже пользуется тригонометрической функцией «синус» (впервые примененной индийским математиком Арьябхаттой около 500 г. н. э.) вводит новую тригонометрическую функцию — тангенс и дает вывод так называемой основной формулы сферической тригонометрии: формулы косинуса сторон сферического треугольника.

Известный арабский астроном Абу-ль-Вефа (939—998) усовершенствовал приемы вычислений синусов и тангенсов и дал доказательство важной теоремы о соотношениях между синусами углов и синусами сторон сферического треугольника (теоремы синусов).

Азербайджанский математик Насирэддин Туси (1201—1274) впервые излагает сферическую тригонометрию уже как самостоятельную научную дисциплину. Он решает задачу об определении сторон сферического треугольника по данным трем его углам, пользуясь построением вспомогательного треугольника, полярного данному (теорема о полярных треугольниках не стала известной в Европе и была в XVII в. открыта независимо).

Подобно тому как это имело место в античной науке, все зависимости между сторонами и углами сферического треугольника, полученные арабскими учеными, не выражались символами, а облекались в геометрическую форму.

В эпоху Возрождения (XIV—XVI вв.) центр научной деятельности перемещается в Европу. Здесь развитие сферической тригонометрии значительно ускорилось на фоне общего подъема производительных сил и, в частности, благодаря изобретению книгопечатания, логарифмов и десятичных дробей (XV—XVI вв.).

Первыми из европейских математиков вопросами сферической тригонометрии занимались Пурбах (1423—1461) и Регномонтан (1436—1476). Пурбах вывел некоторые формулы для решения сферических треугольников и вычислил новую таблицу синусов через 10′ угла. Более значительный вклад в развитие сферической тригонометрии внес Регномонтан. В 3-й и 4-й книгах его труда «Пять книг о различного рода треугольниках» он излагает сферическую тригонометрию как самостоятельную науку. Опираясь на греческие и арабские источники, Регномонтан развивает теоремы синусов и косинусов и рассматривает различные случаи решения сферических треугольников. Им были вычислены также таблицы синусов через 1′ (Регномонтан принимал $\sin 90° = 60\,000$) и тангенсов, представленных в десятичном счислении (полагая $\operatorname{tg} 45° = 100\,000$). Эти книги Регномонтана, опубликованные Шёнером лишь в 1533 г., и таблицы, опубликованные в 1541 г., послужили основой для дальнейшего развития сферической тригонометрии в Европе и легли в основу многих астрономических вычислений.

Второй важной работой Регномонтана, напечатанной в 1474 г., были «Эфемериды», содержавшие координаты Солнца, Луны и пяти планет на каждый день года в период с 1475 г. по 1506 г. Это был первый печатный астрономический календарь, которым пользовались Колумб (1451—1506), Америго Веспуччи (1451—1512) и Коперник (1473—1543).

В XVII в. шотландский математик Непер (1550—1617) вывел свои знаменитые аналогии — формулы определения двух углов сферического треугольника по тангенсам через синусы или косинусы противолежащих им сторон и котангенсу третьего угла и для определения двух сторон сферического треугольника по их тангенсам через синусы или косинусы противолежащих им углов и тангенсу третьей стороны. Позже голландский геодезист Снеллиус (1580—1626) заново обосно-

вал понятие о полярных сферических треугольниках и доказал ряд теорем о них, давших вычислителям удобные методы для решения многих задач сферической тригонометрии.

Современный вид придал сферической тригонометрии Эйлер (1707—1783). Установленное им «ограничение», состоящее в рассмотрении лишь таких сферических треугольников, стороны и углы которых меньше 180°, упорядочивает основания сферической тригонометрии и упрощает ее формулы. Французский астроном и геодезист Деламбр (1749—1822) получил четыре важные формулы, дающие выражения для синусов и косинусов полусумм и полуразностей двух углов сферического треугольника через синусы и косинусы противолежащих им сторон и половинных значений третьего угла. Формулы эти, независимо выведенные также Гауссом (1777—1855), служат вместе с аналогиями Непера рабочими формулами для решения сферических треугольников.

В практических приложениях сферической тригонометрии важную роль играет теорема Лежандра (1752—1833), в соответствии с которой решение малых сферических треугольников (стороны которых незначительны в сравнении с радиусом сферы) без потери точности можно производить по формулам плоской тригонометрии.

Французский математик Модюи (1731—1815) сформулировал простые и удобные мнемонические правила для решения прямоугольных сферических треугольников. Наконец, Люилье (1750—1840) и Каньоли разработали изящные одночленные формулы для вычисления эксцесса сферического треугольника и функции его сторон, необходимого для определения его площади.

В XX в. применение сферической тригонометрии значительно расширилось благодаря усовершенствованию программированных вычислительных схем и созданию электронных вычислительных машин. В настоящее время сферическая тригонометрия находит применение во многих отраслях науки и техники. Ее выводами широко пользуются в астрономии, геодезии, картографии, географии, маркшейдерии, мореплавании, авиации и космонавтике.

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ НА СФЕРЕ

§ 1. Сведения из геометрии сферы

Сфера представляет собой геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от некоторой точки, называемой ее *центром*. Часть пространства, заключенная внутри сферы, образует фигуру шара. Отрезок прямой, соединяющий центр сферы с любой из ее точек, называется *радиусом*, а отрезок прямой, проходящий через центр сферы и соединяющий две ее точки, называется *диаметром* сферы.

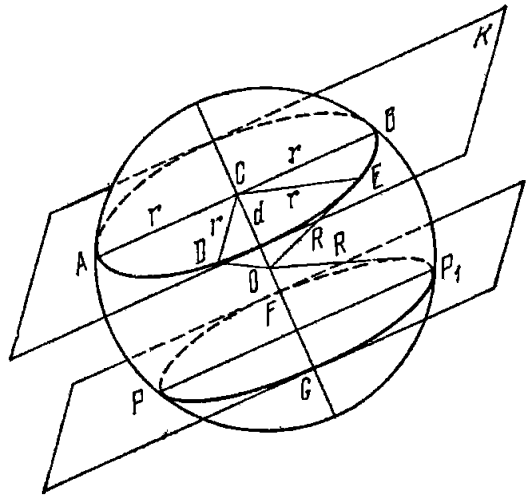

Рис. 1.

Всякое сечение сферы плоскостью является окружностью. Пусть в пересечении сферы плоскостью K получилась некоторая замкнутая кривая линия (рис. 1).

Обозначив через C основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы O на плоскость K, и выбрав на линии сечения две произвольные точки D и E, соединим их прямыми с точками O и C. Поскольку линии CD и CE лежат в плоскости K, то $CD \perp OC$ и $CE \perp OC$. Линии OE и OD равны, так как являются радиусами сферы. Поэтому треугольники OCD и OCE прямоугольные и равны между собой. Из этого построения вытекает, что $CD=CE$, т. е. что точки D и E замкнутой кривой ΛDEB находятся на равных расстояниях от точки C секущей плоскости K, а значит, линия сечения представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от точки C, т. е. окружность с центром в точке C.

Если R — радиус сферы, r — радиус окружности сечения и d — длина перпендикуляра OC, опущенного из центра O сферы на секущую плоскость K, то в каждом из равных между собою прямоугольных треугольников будем иметь

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}. \qquad (1)$$

Формула (1) показывает, что с изменением расстояния d секущей плоскости от центра сферы изменяется также и радиус r окружности сечения. Чем дальше от центра O сферы располагается секущая плоскость K, тем меньше радиус r окружности сечения. В частности, при $d = R$ окружность сечения обращается в точку, а секущая плоскость превращается в плоскость, касательную к сфере.

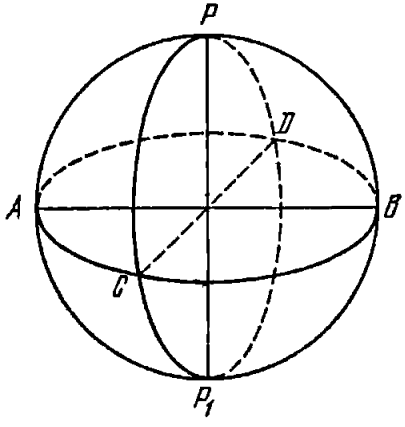

Рис. 2.

С приближением секущей плоскости к центру O сферы радиус r окружности сечения будет увеличиваться. Когда же секущая плоскость пройдет через центр O сферы, радиус r окружности сечения станет равен радиусу R сферы. Такое сечение называется сечением по *большому кругу* сферы. Все окружности больших кругов дан-

ной сферы, как окружности одного и того же радиуса R, равны друг другу.

Все окружности, лежащие в плоскостях сечений, не проходящих через центр O, называются окружностями *малых кругов*. Малые круги равны между собою, если содержащие их плоскости сечений одинаково удалены от центра O. Круги сечений, плоскости которых параллельны между собой, например PFP_1G и $ADEB$ (см. рис. 1), называются параллельными кругами.

Если из центра O сферы восставить к плоскости $ACBD$ одного из ее больших кругов перпендикуляр, называемый осью этого круга, то при неограниченном продолжении его в обе стороны он пересечет сферу в двух диаметрально противоположных ее точках P и P_1, называемых *полюсами* окружности данного большого круга (рис. 2). Очевидно, что оба полюса, P и P_1, лежат на концах одного и того же диаметра сферы и находятся на одинаковых угловых расстояниях от всех точек окружности $ACBD$ большого круга, называемой их *полярой* или *экватором*. Так как все дуги PA, PC, PB, PD, P_1A, P_1C, P_1B, P_1D и др. окружностей больших кругов стягивают каждая прямой угол с вершиной в центре O сферы, то угловое расстояние каждой из точек поляры от ее полюсов составляет $\frac{\pi}{2}$ или 90°.

Так как окружность $ACBD$ (см. рис. 2) большого круга отстоит от обоих полюсов P и P_1 на равных угловых расстояниях, то она делит пополам все окружности больших кругов (*меридианы*), проходящие через полюсы P и P_1 сферы. Отсюда следует, что каждая окружность большого круга разделяет сферу на две равные части. Все окружности PAP_1B, PCP_1D и др. больших кругов, проходящие через оба полюса P и P_1 сферы, перпендикулярны к экватору $ACBD$ этих полюсов, поскольку они лежат в плоскостях, содержащих ось PP_1, по построению перпендикулярную к плоскости большого круга, содержащего поляру. Наоборот, если построить ряд больших кругов, перпендикулярных к какому-либо большому кругу, то все они будут проходить через полюсы этого большого круга. Так как $CP \perp AB$, то дуга CP является *сферическим перпендикуляром* к дуге AB, точка C которой является основанием сферического перпендикуляра.

Известно, что через три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну. Проведем через две точки A и D, лежащие на сфере, и ее центр O плоскость (рис. 3). Всякая плоскость, проходящая через центр сферы, пересекает сферу, образуя на ней окружность большого круга. Следовательно, дуга AD на сфере есть дуга

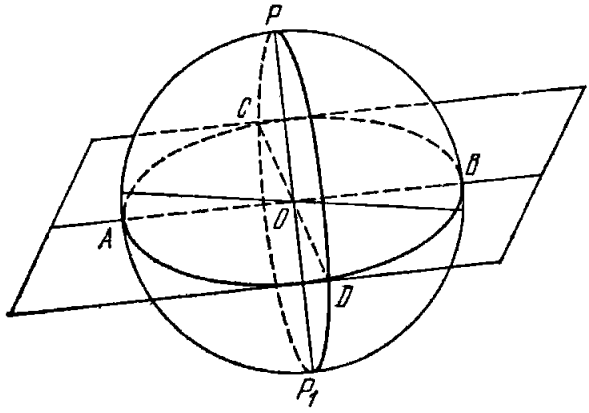

Рис. 3.

окружности большого круга. Так как через три точки A, D и O проходит лишь одна плоскость, то через две точки сферы A и D проходит лишь одна окружность большого круга. Если же такие точки лежат на концах одного диаметра сферы (например, точки A и B), то все три точки A, B и O будут находиться на одной прямой и через них можно провести бесчисленное множество плоскостей. Таким образом, подобно тому как через две точки плоскости можно провести прямую и притом только одну, так и через две точки на сфере (не лежащие на концах одного и того же диаметра) можно провести дугу окружности большого круга и притом только одну. В геометрии доказывается, что дуга окружности большого круга (меньшая 180°) есть кратчайшее расстояние между двумя точками сферы.

Окружность ADE малого круга на сфере (частью которого является дуга AD) (рис. 4) является геометрическим местом точек, равноудаленных от некоторой точки B сферы, называемой *сферическим центром* или *полюсом* этого малого круга, в отличие от его центра C

как плоской фигуры. Расстояние на сфере, т. е. дуга AB окружности ее большого круга, от сферического центра B до любой точки A окружности данного малого круга называется *сферическим радиусом* ρ.

Если R — радиус сферы, r — линейный и ρ — сферический радиусы окружности ADE малого круга на сфере, а φ — угол между радиусами сферы, проведенными из ее центра O к сферическому центру B и любой точке A окружности ADE, то длина этой окружности будет равна

$$L = 2\pi r = 2\pi R \sin \varphi. \qquad (2)$$

Как известно, площадь сферы радиуса R равна

$$S = 4\pi R^2. \qquad (3)$$

Часть сферы, заключенная между двумя параллельными плоскостями, ее рассекающими, называется *сферическим поясом*. Если же одна из этих плоскостей не рассекает сферу, а является касательной к ней, то часть

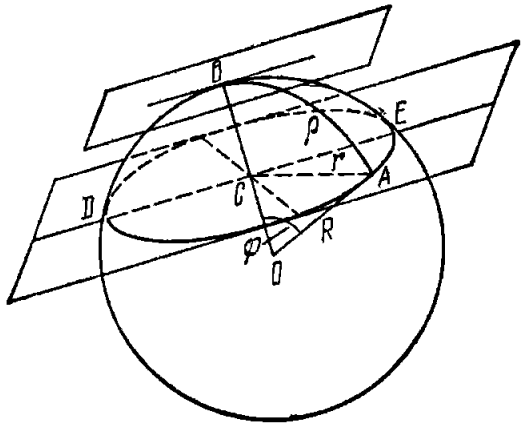

Рис. 4.

сферы, находящаяся между параллельными плоскостями, является *сферическим сегментом*. Площади поверхностей сферического сегмента и сферического пояса пропорциональны их высотам (расстояниям между плоскостями сечений) и не зависят от положения этих фигур на сфере:

$$S_h = 2\pi RH, \qquad (4)$$

где R — радиус сферы и $H=BC=R-OC$ есть высота сферического сегмента или сферического пояса (см. рис. 4).

Площадь сферического сегмента высотой $H = BC$ в выражении через сферический радиус $\rho = AB$ малого круга ADE равна

$$S_h = 2\pi RH = 2\pi R(R - R\cos\rho) = \\ = 2\pi R^2(1 - \cos\rho) = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\rho}{2}. \qquad (5)$$

Площадь сферического пояса между окружностями большого круга и параллельного ему малого круга можно представить как разность площадей полусферы и сферического сегмента:

$$2\pi R^2 - 2\pi R^2(1-\cos\rho) = 2\pi R^2 \cos\rho. \qquad (6)$$

Так как угол в 1 радиан стягивается дугой окружности большого круга сферы, равной ее радиусу R, то

Таблица 1

Плоскость	Сфера
Прямая линия	Дуга окружности большого круга на сфере
Между двумя точками проходит только одна прямая	Между двумя точками проходит только одна дуга окружности большого круга, если эти точки не лежат на концах одного диаметра
Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками	Дуга окружности большого круга, меньшая 180°, есть кратчайшее расстояние между двумя точками
Две прямые пересекаются только в одной точке	Две дуги окружностей больших кругов, меньшие 180°, пересекаются только в одной точке
Кривая линия	Дуга окружности малого круга

$R^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ,3$, а площадь квадрата на сфере со стороной R° равна $(R^\circ)^2 = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^2$ квадратных градусов.

Поэтому площадь сферы содержит $S = 4\pi(R^\circ)^2 = 4\pi\left(\frac{360^\circ}{2\pi}\right)^2 = 41252{,}96$ квадратного градуса.

В заключение параграфа мы приводим ряд аналогий между понятиями, относящимися к плоскости и к сфере, полезных при изучении сферической тригонометрии (табл. 1).

§ 2. Дуги и углы на сфере

В сферической тригонометрии рассматриваются только такие фигуры, которые образованы дугами б о л ь ш и х кругов, поэтому здесь и далее в тексте под словом «дуга» подразумевается отрезок дуги большого круга. В тех случаях, когда речь идет о дуге малого круга, это должно быть специально оговорено. Длина дуги пропорциональна величине *центрального угла*, т. е. угла, описываемого концом радиуса при перемещении от одного конца дуги до ее другого конца, поэтому дуга

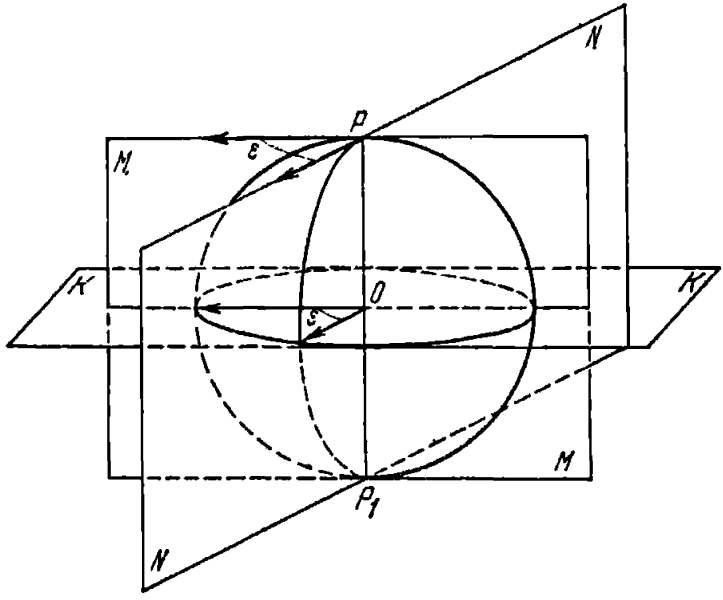

Рис. 5.

на сфере измеряется величиной угла между радиусами, опирающимися на концы этой дуги.

Как правило, в сферической тригонометрии, по предложению Леонарда Эйлера, рассматриваются только те дуги, длина которых равна или менее половины

длины окружности. Это правило носит название «*ограничения Эйлера*».

Рассмотрим сферу с центром в O (рис. 5). Пусть есть две дуги, образованные сечением сферы плоскостями M и N, пересекающимися по диаметру PP_1. Плоскости M и N образуют между собой двугранный угол ε, измеряемый в плоскости K, перпендикулярной к линии пересечения этих плоскостей. Так как линией пересечения плоскостей M и N является диаметр сферы PP_1, а выбор точки, через которую проходит секущая плоскость, произволен, то мы можем совместить точку пересечения с одним из концов диаметра PP_1 или с центром сферы O. В первом случае двугранный угол между плоскостями будет равен углу между касательными к дугам, образованным пересечением сферы этими плоскостями, во втором — центральному углу между дугами в плоскости поляры, полюсы которой совмещены с точками P и P_1. Поскольку и центральный угол и угол

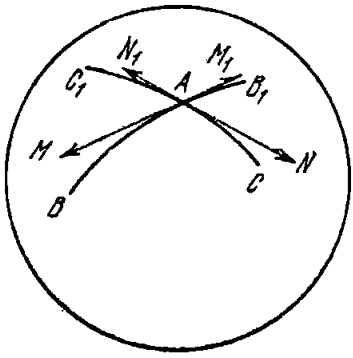

Рис. 6.

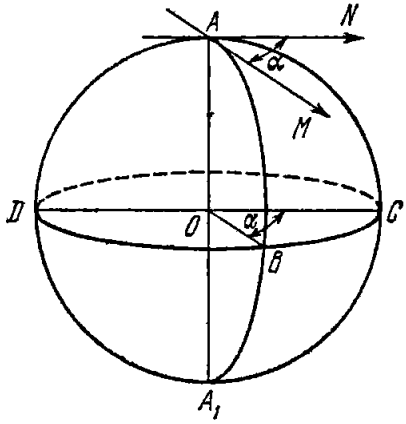

Рис. 7.

между касательными к дугам в точке P есть двугранный угол между плоскостями M и N, говорят, что угол между дугами на сфере равен углу между касательными к этим дугам в точке их пересечения.

Две дуги, BB_1 и CC_1, пересекаясь в точке A на сфере, образуют *сферический угол CAB*. Тогда A является его вершиной, а дуги AB и AC — сторонами сферического угла. Величина сферического угла измеряется углом между касательными MA и NA к сторонам сфе-

рического угла CAB в точке их пересечения, т. е. в вершине сферического угла (рис. 6).

Теорема. *Сферический угол BAC* (рис. 7) *измеряется дугой BC, заключенной между его сторонами, для которой вершина угла A является полюсом:*

$$\text{сфер. } \angle BAC = \cup BC.$$

Доказательство. Продолжим дуги AB и AC до их пересечения в точке A_1. Так как дуги ABA_1 и ACA_1 являются дугами больших кругов, то точки A и A_1 лежат на одном диаметре AOA_1, представляющем линию пересечения плоскостей ABA_1 и ACA_1. Эти плоскости образуют двугранный угол, который мы назовем соответствующим сферическому углу BAC.

Проведем касательные MA и NA к сторонам сферического угла AB и AC в его вершине A. По свойству касательных они лежат в плоскостях больших кругов ABA_1 и ACA_1 и

$$AM \perp AA_1, \quad AN \perp AA_1.$$

Построим плоскость $OCBD$, перпендикулярную к диаметру AA_1 и проходящую через центр сферы O. Пересечение этой плоскостью сферы даст большой круг BCD, для которого точки A и A_1 являются полюсами. Этот круг пересечется с дугами ABA_1 и ACA_1 в точках B и C. По построению $OB \perp AA_1$ и $OC \perp AA_1$. Таким образом, угол BOC также будет плоским углом двугранного угла MAA_1N, а так как все плоские углы двугранного угла конгруэнтны, то $\angle BOC = \angle MAN = \text{сфер.}\angle BAC$.

Так как угол BOC есть центральный угол дуги BC, то $\angle BOC = \cup BC$, и мы можем написать:

$$\text{сфер. } \angle BAC = \cup BC,$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема имеет несколько следствий.

Следствие 1. *Сферический угол и соответствующий ему двугранный угол имеют одну и ту же меру.*

Доказательство. Так как мерой двугранного угла является действительное число, равное мере каждого его плоского угла, то можно написать:

$$\angle MAA_1N = \angle MAN = \angle BOC = \text{сфер. } \angle BAC,$$

но, согласно теореме, сфер. $\angle BAC = \cup BC$ и, следовательно,

$$\angle MAA_1N = \cup BC.$$

Следствие 2. *Дуга большого круга, проходящая через полюс какого-либо другого большого круга, перпендикулярна к этому большому кругу, т. е.*

$$\cup AB \perp \cup BC.$$

Доказательство. По построению плоскость CBD перпендикулярна к прямой AA_1 в точке O. В стереометрии доказывается, что если какая-либо прямая перпендикулярна к данной плоскости, то и каждая прямая, лежащая в этой плоскости и проходящая через точку пересечения, перпендикулярна к данной прямой. Плоскость CBD содержит прямую CO, пересекающуюся с AO, и поэтому прямая CO перпендикулярна к прямой AO. Поэтому плоскость ACA_1, содержащая прямую AO, перпендикулярна к плоскости CBD. Следовательно, двугранный угол $ACDB$, составленный этими плоскостями, есть прямой угол, и сферический угол ABC, соответствующий этому двугранному углу, также прямой, а это означает, что $\cup AB \perp \cup CB$.

Так как плоскость ACA_1, содержащая прямую AA_1, была выбрана нами произвольно, то этим свойством обладает любая плоскость, содержащая прямую AA_1, и, следовательно, любая дуга большого круга, проходящая через полюс A, перпендикулярна к дуге большого круга CBD.

Если угол между дугами AB и CB — прямой, то дуга AB называется сферическим перпендикуляром к дуге CB.

Следствие 3. *Сферический перпендикуляр к данной дуге большого круга проходит через полюс этого большого круга.*

Доказательство. Прямая OB лежит в плоскости $CODB$, которая перпендикулярна к прямой AA_1. Через две прямые AO и OB, пересекающиеся в точке O, проводим плоскость AOA_1B. Эта плоскость перпендикулярна к плоскости $CODB$. В пересечении со сферой плоскость образует дугу большого круга ABA_1. Согласно следствию 2 дуга, проходящая через полюс какого-либо другого большого круга, перпендикулярна к этому большому кругу, что и доказывает следствие 3.

Следствие 4. *Вертикальные сферические углы конгруэнтны.*

Доказательство. Два сферических угла называются вертикальными, если стороны одного из них являются продолжением дуг, образующих стороны другого сферического угла. Например, на рис. 6 сферические углы BAC и B_1AC_1 являются вертикальными углами.

Продолжим касательные AM и AN в противоположном направлении. Они образуют лучи AM_1 и AN_1, которые составляют плоские вертикальные углы MAN и M_1AN_1, которые, по определению, равны: $\angle MAN = \angle M_1AN_1$. Но угол MAN является мерой сферического угла BAC, а угол M_1AN_1 — мерой сферического угла B_1AC_1, т. е.

$$\text{сфер. } \angle BAC = \angle MAN \text{ и сфер. } \angle B_1AC_1 = \angle M_1AN_1.$$

Следовательно,

$$\text{сфер. } \angle BAC = \text{сфер. } \angle B_1AC_1.$$

Следствие 5. *Смежные сферические углы равны в сумме двум прямым.*

Доказательство. Смежными сферическими углами называются такие сферические углы, которые имеют общую вершину и одну общую сторону, причем другие стороны лежат на одном большом круге. Например, на рис. 7 сферические углы ABC и ABD являются смежными углами.

Из рисунка видно, что дуга AC является мерой сферического угла CBA, а дуга AD — мерой сферического угла ABD, т. е.

$$\text{сфер. } \angle ABC = \smile AC \text{ и сфер. } \angle ABD = \smile AD.$$

Складывая правые и левые части этих равенств, находим

$$\text{сфер. } \angle ABC + \text{сфер. } \angle ABD = \smile CA + \smile AD = \smile CD.$$

Но дуга CD есть половина окружности большого круга и ее длина является мерой суммы двух сферических углов ABC и ABD, следовательно, сумма этих двух углов равна двум прямым, что и требовалось доказать.

§ 3. Измерение дуг и центральных углов

Для измерения длин дуг и соответствующих им центральных углов применяются следующие единицы:

1) *Радиан* — центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна одному радиусу. Так как отношение длины окружности к длине радиуса равно 2π, то окружность содержит 2π дуг, длина которых равна по длине радиусу сферы. Число π равно 3,1415926536... Хотя число π вычислено с помощью электронных вычислительных машин с количеством знаков, достигающим нескольких сотен знаков после запятой, практические вычисления никогда не требуют в числе π более десяти значащих цифр после запятой. Углы меньше одного радиана выражаются в десятичных долях радиана.

Радианная мера используется преимущественно в теоретических выкладках и аналитических формулах.

2) *Градус* — центральный угол, соответствующий дуге в 1/360 часть окружности. Градус (°) делится на 60 минут (′), минута делится на 60 секунд (″). Иногда доли градуса измеряются десятичными долями.

Градусная мера наиболее широко используется в естествознании и технике.

Градусная и радианная меры связаны между собой следующими соотношениями:

$$1 \text{ радиан} = \text{r} = 57°,29577951 = 3437′,746771 = 206264″,80625;$$

$$1° = 3600″ = 0^{\text{r}},01745329,\quad 1′ = 60″ = 0^{\text{r}},00029089,\quad 1″ = 0^{\text{r}},000004848.$$

3) *Час* — центральный угол, соответствующий дуге в 1/24 часть окружности. Час ($^{\text{h}}$) делится на 60 минут ($^{\text{m}}$), минута делится на 60 секунд ($^{\text{s}}$).

Часовая мера используется тогда, когда вычисления связаны с вращением Земли и счетом времени. Для различия единиц часовой и градусной мер часто поясняется: «минута дуги» — в градусной мере или «секунда времени» — в часовой мере.

Часовая и градусная меры связаны соотношениями:

$$1° = 4^{\text{m}},\qquad 1^{\text{h}} = 15°,$$

$$1′ = 4^{\text{s}},\qquad 1^{\text{m}} = 15′,$$

$$1″ = 0^{\text{s}},066...,\qquad 1^{\text{s}} = 15″.$$

4) *Град* — центральный угол, соответствующий дуге в 1/400 часть окружности. Град (^{g}) делится на сто соток (^{c}), а сотка в свою очередь еще на сто частей (^{cc}).

Исчисление углов в градах предполагалось применять для замены сложной шестидесятеричной градусной системы десятичной системой. Был выпущен ряд инструментов, оцифрованных в градах, но эта система широкого распространения не получила.

$$10^g = 9°; \quad 1^c = 3',6; \quad 1^{cc} = 0'',324.$$

5) *Тысячная*, или артиллерийское деление — центральный угол, соответствующий дуге в 1/6000 часть окружности. Принимая π равным 3, в этой системе считают радиан равным 1000 артиллерийских делений (вместо $\frac{6000}{2\pi} = 955$ артиллерийских делений), поэтому деление артиллерийского угломера называют «тысячной», подразумевая единицу, составляющую 0,001 радиуса.

Таблица 2

Величина угла	Мера угла				
	в радианах	в градусах	в градах	в часах	в арт. делениях
Радиан	1	57°,3	$63^g,9$	$3^h,82$	$955 \approx 100$
Градус	$\frac{\pi}{180}$	1°	$1\frac{1^g}{9}$	$\frac{1^h}{15} = 4^m$	$16\frac{2}{3}$
Град	$\frac{\pi}{200}$	$1\frac{1°}{9}$	1^g	$0^h,06 = 3^m,6$	15
Час	$\frac{\pi}{12}$	15°	$16\frac{2^g}{3}$	1^h	250
Арт. деление	$\frac{\pi}{3000}$	$0°,06 = 3'.6$	$\frac{1^g}{15}$	$0^h,004 = 14^s,4$	1

Эта система счета применяется в артиллерии, где она удобна для быстрых приближенных определений линейной величины предмета h или расстояния до предмета L, если измерена угловая величина предмета α в артиллерийских делениях. Величины h, L и α связаны простым приближенным соотношением

$$L = 1000\ h/\alpha,$$

Таблица 3

Мера угла	Величина угла					
	полный угол (окружность)	развернутый угол (полуокружность)	прямой угол (квадрант)	треть развернутого угла	четвертая развернутого угла	шестая развернутого угла
В прямых углах	$4d$	$2d$	d	$\frac{2}{3}d$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{3}d$
В радианах	2π	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$
В градусах	360°	180°	90°	60°	45°	30°
В градах	400^g	200^g	100^g	$66^2/_3{}^g$	50^g	$33^1/_3{}^g$
В часах	24^h	12^h	6^h	4^h	3^h	2^h
В арт. делениях	6000	3000	1500	1000	750	500

что позволяет просто и быстро определять расстояние до цели.

В естествознании эта система практически не применяется.

Соотношение различных систем и выражение некоторых основных углов в различных угловых единицах (прямой угол обозначается d) приводятся в таблицах 2 и 3.

ГЛАВА II

СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 4. Сферические треугольники. Свойства сторон и углов сферического треугольника

Часть сферы, заключенная между двумя полуокружностями ее больших кругов, пересекающимися на концах A и A_1 одного и того же диаметра, образует фигуру, называемую *сферическим двуугольником* (рис. 8). Сферический двуугольник есть простейшая фигура, существующая на сфере. Его можно рассматривать и как часть сферы, содержащуюся между дугами полуокружностей AEA_1 и AFA_1 больших кругов, образующихся на сфере в результате пересечения ее гранями двугранного угла, ребро которого совпадает с диаметром AA_1 сферы, а грани содержат точки E и F. Стороны AEA_1 и AFA_1 сферического двуугольника, составленного полуокружностями больших кругов, равны 180° каждая.

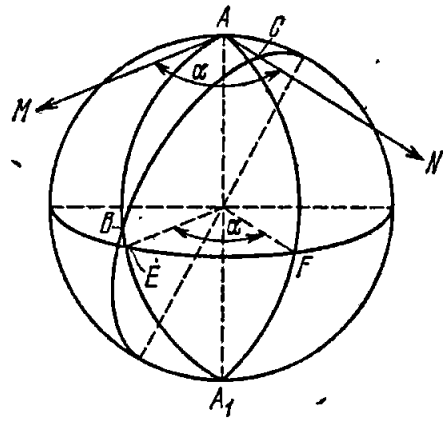

Рис. 8.

Часть сферы ABC, заключенная между тремя пересекающимися дугами окружностей ее больших кругов, называется *сферическим треугольником.* Точки пересечения дуг, образующих сферический треугольник, называются вершинами сферического треугольника и обозначаются заглавными буквами A, B, C,

тогда как противолежащие им дуги, заключенные каждая между двумя вершинами, называются сторонами сферического треугольника и обозначаются одноименными малыми буквами a, b, c.

Сферический треугольник ABC можно также рассматривать как часть сферы, ограниченную дугами a, b, c окружностей ее больших кругов, полученных при пересечении сферы гранями трехгранного угла $OABC$, вершина O которого совпадает с центром сферы, а грани содержат плоские дуги a, b, c, образующие стороны сферического треугольника ABC (рис. 9).

Так как сферический угол и соответствующий ему двугранный угол имеют одну и ту же меру, то двугранные углы трехгранного угла $OABC$ служат мерой углов сферического треугольника ABC при его вершинах, а плоские углы a, b, c того же трехгранного угла $OABC$ являются мерой его сторон. Поэтому как углы A, B, C, так и стороны a, b, c сферического треугольника измеряются в угловой мере, градусной или радианной. Отмеченная сейчас связь между трехгранным углом и сферическим треугольником, ему соответствующим, приводит к заключению, что теоремы, доказываемые в стереометрии для трехгранных углов, остаются справедливыми и для сферических треугольников, что позволяет вывести основные свойства сферических треугольников.

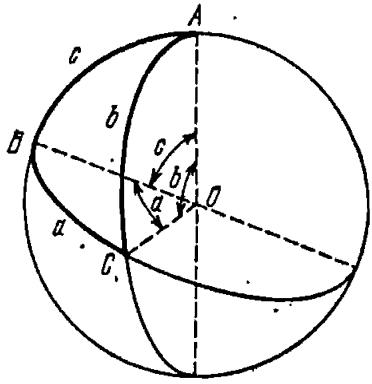

Рис. 9.

Чтобы совокупность дуг и углов на сфере могла образовать сферический треугольник, необходимо, чтобы были соблюдены определенные соотношения, составляющие *условия существования сферического треугольника.* Таких условий шесть. Здесь мы докажем три из них, четвертое доказывается в § 5, пятое и шестое — в § 6.

Из стереометрии известно, что каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы и больше разности двух других его плоских углов. Отсюда непосредственно следует:

1. *Любая сторона сферического треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон*, т. е.

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b; \tag{7}$$

$$b > a - c, \quad a > b - c, \quad c > b - a. \tag{8}$$

Прибавив к обеим частям второго неравенства (7) a, будем иметь $a + b + c > 2a$, а разделив обе части вновь полученного неравенства на 2, получим

$$\frac{a+b+c}{2} > a, \tag{9}$$

т. е. *половина суммы сторон* (или *полупериметр*) *сферического треугольника всегда больше любой из его сторон*. Так как в трехгранном угле сумма его плоских углов больше 0 и меньше 360°, то для периметра сферического треугольника является обязательным условие:

2. *Сумма сторон сферического треугольника больше нуля и меньше* 360°, т. е.

$$0 < a + b + c < 360°. \tag{10}$$

Иными словами, если мы будем уменьшать стороны сферического треугольника, то в пределе он исчезнет, превратится в точку и сумма его сторон обратится в нуль. С другой стороны, если увеличивать стороны сферического треугольника, то в пределе он превратится в окружность большого круга, сумма его сторон будет стремиться к 360°, и в пределе он также исчезнет, т. е. сферический треугольник может существовать только при выполнении условия (10).

Из геометрии также известно, что сумма двугранных углов трехгранного угла всегда больше 180°, но меньше 540°, поэтому для суммы углов сферического треугольника будет обязательно условие:

3. *Сумма углов сферического треугольника больше* 180° *и меньше* 540°, т. е.

$$180° < A + B + C < 540°. \tag{11}$$

Превышение суммы углов сферического треугольника над 180° называется его *эксцессом* или *сферическим избытком* и обозначается буквой ε; отсюда имеем

$$\varepsilon = A + B + C - 180°. \tag{12}$$

Приведенные соотношения (7)—(11), вместе с соотношениями (16) (§ 5), представляют собой условия возможного существования сферического треугольника. Если фигура на сфере является сферическим треугольником, она должна одновременно удовлетворять всем этим условиям.

Сферические углы α могут быть острыми ($\alpha < 90°$), прямыми ($\alpha = 90°$) и тупыми ($90° < \alpha < 180°$) и даже бо́льшими 180°. Дуги окружностей A_1A_2 и B_1B_2 двух больших кругов, пересекаясь между собой в точке C сферы, образуют при ней четыре сферических угла (рис. 10). Так как сферический угол измеряется плоским углом между касательными, проведенными через его вершину, то сумма всех углов при вершине C равна

$$\angle A_1CB_1 + \angle B_1CA_2 + \angle A_2CB_2 + \angle B_2CA_1 = 360°,$$

Сумма двух смежных углов равна двум прямым:

$$\angle A_1CB_1 + \angle A_1CB_2 = \angle B_1CA_2 + \angle A_2CB_2 =$$
$$= \angle A_2CB_2 + \angle B_2CA_1 = \angle A_1CB_1 + \angle B_1CA_2 = 180°.$$

Вертикальные углы, как и обычно, равны между собой:

$$\angle A_1CB_1 = \angle A_2CB_2 \quad \text{и} \quad \angle A_1CB_2 = \angle A_2CB_1.$$

Построенный нами сферический треугольник ABC занимает меньшую часть сферы. Бо́льшая ее часть также представляет собой сферический треугольник, стороны которого a, b, c являются общими со сторонами меньшего треугольника ABC, а углы равны дополнениям углов построенного треугольника до 360°.

В § 1 было доказано, что через две точки A и B сферы, не лежащие на концах одного и того же диаметра, можно провести лишь одну окружность большого круга (рис. 11). Но точки A и B разделяют эту окружность на две неравные части:

$$\smile AcB < 180° \quad \text{и} \quad \smile BdA > 180°.$$

Поэтому сделанное ранее (§ 1) утверждение о том, что дуга окружности большого круга является кратчайшим расстоянием между двумя точками сферы, справедливо лишь по отношению к дуге AcB, но не к дуге AdB. Для избежания подобных оговорок в сферической тригонометрии принято ограничение Эйлера: *рассматриваются*

только такие сферические треугольники, стороны и углы которых меньше 180°. Для краткости треугольники, удовлетворяющие условию Эйлера, называют *треугольниками Эйлера.*

При соблюдении ограничения Эйлера две дуги окружностей больших кругов пересекутся на сфере только в одной точке и она однозначно определяется двумя

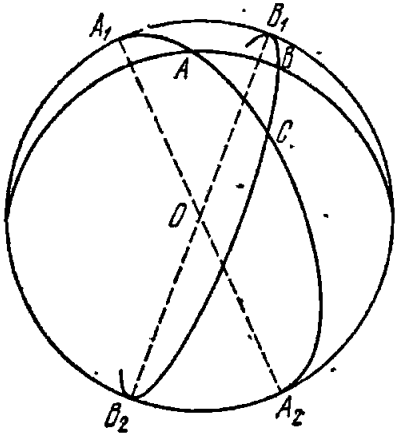

Рис. 10.

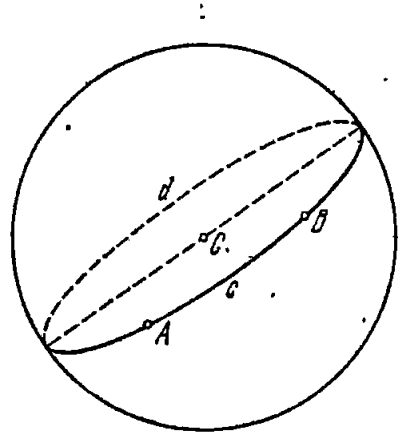

Рис. 11.

пересекающимися в ней дугами окружностей больших кругов. В дальнейшем мы будем рассматривать только треугольники Эйлера.

По форме сферические треугольники разделяются на прямоугольные и косоугольные. В прямоугольном сферическом треугольнике один из углов равен 90°, сторона, ему противолежащая, называется *гипотенузой*, а две другие стороны — *катетами.* Но существуют сферические треугольники с двумя и тремя прямыми углами. Например, на рис. 12 сферические треугольники A_1B_1C, A_1B_1D и A_1CD косоугольные, у них все углы отличаются от 90°; сферические треугольники DHG и CEH — прямоугольные, один из углов прямой (это углы DGH, CEH соответственно); треугольники A_1EF и A_1GE являются двояко прямоугольными, так как имеют по два прямых угла; сферический треугольник A_1FG имеет три прямых угла, он заключает в себе $^1/_8$ часть поверхности сферы.

Наряду с прямоугольными существуют и прямосторонние сферические треугольники, у которых одна из

сторон равна 90°. Но существуют и двояко прямосторонние сферические треугольники, две стороны которых имеют по 90°, а также и трояко прямосторонний сферический треугольник, все стороны которого равны 90°.

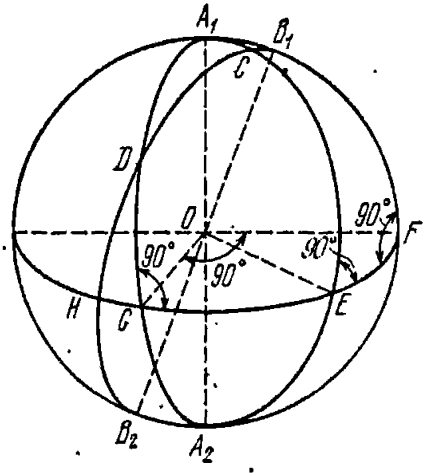

Рис. 12.

Например, сферический треугольник A_1FG (см. рис. 12) является трояко прямосторонним, а A_1FE — двояко прямосторонним.

В косоугольном сферическом треугольнике стороны и углы его могут иметь различные числовые значения, удовлетворяющие неравенствам (7)—(11) и ограничению Эйлера. Два сферических треугольника, составляющие вместе двуугольник, называются сопряженными сферическими треугольниками. Таковы, например, сферические треугольники A_1EF и A_2EF (см. рис. 12).

Смежные сферические треугольники имеют с данным треугольником A_1EF (см. рис. 12) по одной общей стороне. Это треугольники A_2EF (по стороне EF) и A_1EG (по стороне AE).

§ 5. Полярные сферические треугольники

Два сферических треугольника, лежащие на одной и той же сфере, называются *полярными*, если вершины одного из них являются полюсами сторон другого.

Пусть имеем сферический треугольник ABC (рис. 13). Приняв его вершины A, B и C за полюсы, опишем на сфере их поляры, т. е. дуги окружностей больших кругов, отстоящие на 90° от соответствующих полюсов. Построенные таким образом поляры попарно пересекутся между собою в некоторых точках A_1, B_1 и C_1 сферы, образуя новый сферический треугольник $A_1B_1C_1$, который и будет полярным по отношению к данному сферическому треугольнику.

Докажем, что и стороны a, b, c сферического треугольника ABC также отстоят от вершин A_1, B_1 и C_1 полярного треугольника на 90° и что, таким образом, сферические треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ суть треугольники взаимно полярные.

Теорема. *Если сферический треугольник $A_1B_1C_1$ является полярным по отношению к сферическому треугольнику ABC, то сферический треугольник ABC также будет полярным по отношению к треугольнику $A_1B_1C_1$.*

Доказательство. Соединим дугами больших кругов вершину C_1 с вершинами A и B. Вершина A есть по построению полюс дуги B_1C_1, и поэтому дуга AC_1 равна 90°. Вершина B также по построению является полюсом дуги A_1C_1 и следовательно, дуга BC_1 равна 90°. Если точка C_1 отстоит от двух точек A и B дуги AB окружности большого круга на 90°, то эта точка C_1 и есть полюс дуги AB. Аналогичным образом можно доказать, что точка B_1 есть полюс дуги CA и точка A_1 — полюс дуги BC. Таким образом, вершины A_1, B_1 и C_1 являются полюсами дуг CB, AC и AB соответственно и, следовательно, сферический треугольник ABC является полярным по отношению к треугольнику $A_1B_1C_1$.

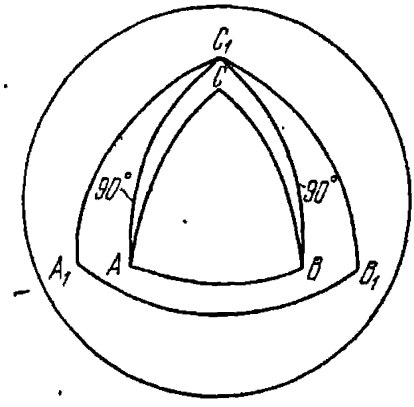

Рис. 13.

Докажем теперь, что соответственные стороны и углы двух взаимно полярных сферических треугольников дополняют друг друга до 180°.

Теорема. *Сумма угла данного сферического треугольника и соответствующей ему стороны полярного треугольника равна* 180°.

Доказательство. Из вершин A, B и C сферического треугольника ABC (рис. 14), как из центров, опишем на сфере на расстояниях, равных 90°, дуги окружностей больших кругов, образующие сферический треугольник $A_1B_1C_1$, полярный данному треугольнику ABC. Продолжим стороны a и c данного треугольника

до пересечения со сторонами b_1 и c_1 полярного ему треугольника. Точки пересечения обозначим буквами D, F и E. Так как дуги BD и BF равны каждая 90°, то дуга DF есть мера сферического угла B, т. е.

$$\angle B = \cup DF.$$

Помимо этого, в соответствии с рис. 14, имеем очевидное равенство.

$$b_1 = A_1D + DF + FC_1.$$

Складывая почленно два последних равенства, находим

$$B + b_1 = A_1D + DF + DF + FC_1.$$

Но так как вершина A_1 находится от дуги EF, являю-

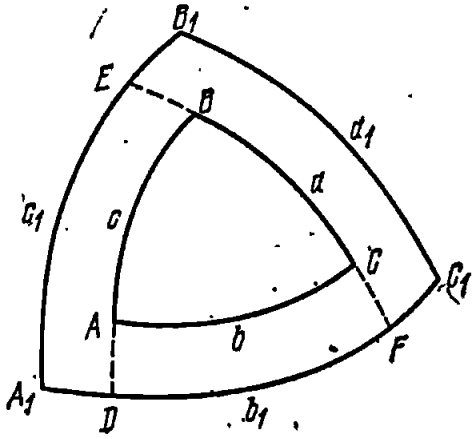

Рис. 14.

щейся ее полярой, на расстоянии 90°, так же, как и вершина C_1 от дуги BD, то

$$A_1D + DF = DF + FC_1 = 90°,$$

и окончательно получаем

$$\left.\begin{aligned} B + b_1 &= 180°, \\ A + a_1 &= 180°, \\ C + c_1 &= 180° \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

(два следующих равенства получаются аналогично). Далее, в соответствии с рис. 14, заключаем, что

дуга EF есть мера сферического угла A_1, т. е.

$$\angle A_1 = \cup EF,$$

и что

$$A_1 = BE + BC + CF.$$

Кроме того, очевидно, что

$$a = EF - BE - CF.$$

Сложив почленно два последних равенства и сократив BE и CF, находим

$$A_1 + a = BC + EF =$$
$$= BC + EB + BC + CF = EC + CF + BC.$$

Но $EC = 90°$, поскольку A_1B_1 есть поляра точки C, а $BC + CF = 90°$, потому что b_1 является полярой точки B_1, поэтому окончательно имеем (также применяя метод аналогии)

$$\left.\begin{aligned} A_1 + a &= 180°, \\ B_1 + b &= 180°, \\ C_1 + c &= 180°. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Итак, системы равенств (13) и (14) показывают, что сумма соответственных углов и сторон двух взаимно полярных сферических треугольников равна 180°.

Исследования показывают, что если каждая из сторон a, b, c данного сферического треугольника ABC меньше 90°, то полярный ему сферический треугольник $A_1B_1C_1$ будет располагаться на сфере вне данного треугольника ABC. Если же некоторые стороны данного сферического треугольника ABC будут бо́льшими 90°, то полярный ему сферический треугольник $A_1B_1C_1$ будет пересекать стороны данного треугольника. Наконец, когда каждая из сторон данного сферического треугольника ABC больше 90°, полярный ему сферический треугольник $A_1B_1C_1$ будет находиться на сфере внутри данного треугольника.

Рассмотренными сейчас свойствами полярного сферического треугольника часто пользуются при выводах различных формул сферической тригонометрии.

Докажем, например, справедливость неравенства

$$A + B - C < 180°. \qquad (15)$$

Так как согласно неравенству (7)

$$a_1 + b_1 > c_1,$$

то, заменяя эти величины их значениями из уравнений (14), имеем

$$180° - A + 180° - B > 180° - C,$$

откуда окончательно получаем (выводя второе и третье неравенство аналогично)

$$\left.\begin{aligned} A + B - C &< 180°, \\ B + C - A &< 180°, \\ C + A - B &< 180°, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

что составляет четвертое условие возможности существования сферического треугольника:

4. *В сферическом треугольнике сумма двух его углов без третьего всегда меньше* 180°.

§ 6. Соотношения между сторонами и углами сферического треугольника

Докажем ряд теорем.

Теорема 1. *Внешний угол сферического треугольника меньше суммы двух внутренних углов, с ним не смежных, но больше их разности.*

Доказательство. Продолжим в сферическом треугольнике ABC одну из сторон, например a, и образуем внешний угол D (рис. 15). Из рис. 15 видно, что $\angle D + \angle C = 180°$. Так как $A + B + C > 180°$, то $A + B + C > D + C$. Отсюда получаем $A + B > D$.

Для доказательства второй части теоремы воспользуемся неравенством (15): $A + C - B < 180°$, или, иначе, $A + C - B < D + C$, откуда имеем $A - B < D$.

Теорема 2. *Углы при основании равнобедренного сферического треугольника равны между собой.*

Доказательство. Пусть ABC есть равнобедренный сферический треугольник, в котором две его стороны равны между собой: $b = c$ (рис. 16). Допустим, что $b < 90°$. Проведем к вершинам A, B и C радиусы сферы CO, BO и AO и построим касательные SB и SC к равным сторонам b и c в вершинах B и C. Эти касательные пересекут продолжение радиуса OA в одной и

той же точке S, длины их будут равны: $BC = CS$. Проведем к стороне a через вершины B и C касательные BT и CT и соединим точку их пересечения T с точкой S отрезком прямой TS.

В плоских треугольниках STB и STC сторона TS является их общей стороной, а две другие стороны попарно равны между собой, т. е. $BS = CS$ и $BT = CT$. Очевидно, что эти треугольники равны между собой. Отсюда следует, что $\angle SBT = \angle SCT$. Но поскольку

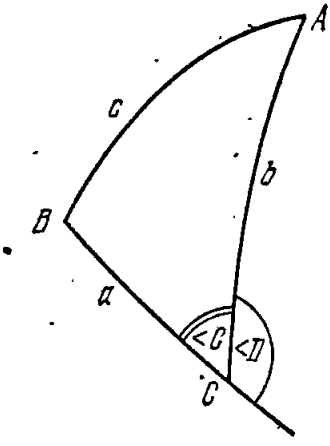

Рис. 15.

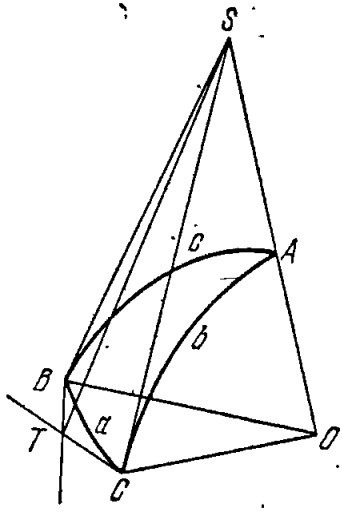

Рис. 16.

этими углами измеряются сферические углы при вершинах B и C сферического треугольника, отсюда заключаем, что $B = C$.

Из доказанной сейчас теоремы вытекает, что в сферическом треугольнике против равных сторон лежат равные углы, т. е. если $b = c$, то $B = C$.

При доказательстве теоремы было принято, что стороны b и c сферического треугольника меньше 90°. Если они больше 90°, то касательные к ним, проведенные через вершины B и C, пересекут радиус OA сферы между точками A и O, однако доказанная для частного случая эта теорема имеет общее значение.

Теорема 3. *Против равных углов в сферическом треугольнике лежат равные стороны.*

Доказательство. Пусть имеем сферический треугольник ABC, в котором $A = C$. Требуется дока-

зать, что $a = c$. Возьмем полярный данному сферический треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами a_1, b_1, c_1. Так как по условию $A = C$, то на основании свойств полярных треугольников имеем, что $a_1 = c_1$ и что полярный данному сферический треугольник $A_1B_1C_1$ является равнобедренным. Но по доказанному в теореме 2 против равных сторон лежат равные углы, а потому $\angle A_1 = \angle C_1$. Но если это так, то и дополнения их до 180° также равны между собой, т. е. $a = c$.

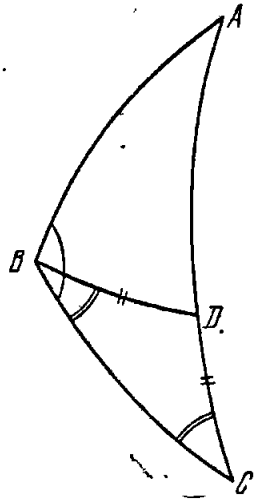

Рис. 17.

Теорема 4. *В сферическом треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона.*

Доказательство. Пусть угол B сферического треугольника ABC будет больше угла C (рис. 17). Проведем через вершину B дугу BD окружности большого круга под углом DBC, равным углу C. Так как треугольник BCD имеет два равных угла, то он является равнобедренным и по доказанному ранее его стороны BD и CD равны между собой. Но для треугольника ABD будет справедливо неравенство

$$AB < AD + BD.$$

Заменяя сторону BD равной ей стороной DC, имеем

$$AB < AD + DC,$$

т. е. $AB < AC$.

Теорема 5. *В сферическом треугольнике против большей стороны лежит больший угол.*

Доказательство. Пусть в сферическом треугольнике $b > c$. Требуется доказать, что для его углов имеет место неравенство $B > C$. Построим для данного треугольника ABC полярный ему треугольник $A_1B_1C_1$, для которого неравенство $b > c$ обратится в неравенство $180° - B_1 > 180° - C_1$, или, что то же самое, $B_1 < C_1$. Отсюда на основании предыдущей теоремы имеем $b_1 < c_1$. Переходя затем от полярного сфе-

рического треугольника к данному, можем написать $180°-B<180°-C$, на основании чего находим: $B>C$.

Треугольники Эйлера обладают так называемым *свойством однородности*, которое заключается в том, что *если сумма двух сторон сферического треугольника больше, равна или меньше* 180°, *то и сумма противолежащих им углов больше, равна или меньше* 180°. Справедливость приведенных положений можно доказать геометрически.

Теорема 6. *Если сумма двух сторон сферического треугольника удовлетворяет одному из условий* $a+b<180°$, $a+b=180°$ *или* $a+b>180°$, *то и сумма противолежащих им углов удовлетворяет соответствующему условию* $A+B<180°$, $A+B=180°$ *или* $A+B>180°$.

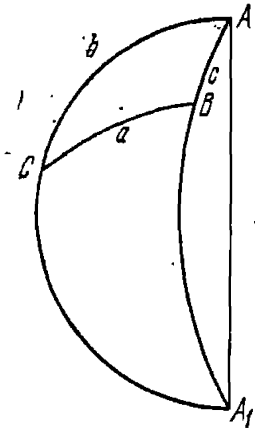

Рис. 18.

Доказательство. Продолжим стороны b и c данного сферического треугольника ABC так, чтобы образовался двуугольник AA_1. При этом одна из сторон сферического треугольника ABC, например a, будет содержаться внутри двуугольника (рис. 18).

Если дано, что $a+b<180°$, то $a<180°-b$ или $a<\cup A_1C$, и согласно теореме 5 в сопряженном сферическом треугольнике A_1BC будем иметь: $A_1<\angle CBA_1$. Но так как $\angle CBA_1=180°-B$ и $A_1=A$, то $A<180°-B$ и, следовательно, $A+B<180°$.

Если дано, что $a+b=180°$, то $a=180°-b$ и $a=\cup A_1C$, т. е. сопряженный сферический треугольник является равнобедренным и по теореме 2 угол $A_1=\angle CBA_1$ или, так как $A_1=A$, $A=180°-B$ и, следовательно, $A+B=180°$.

Если дано, что $a+b>180°$, то тогда $a>180°-b$, или $a>\cup A_1C$, поэтому согласно теореме 5 в сопряженном сферическом треугольнике A_1BC будут справедливы неравенства $A_1>\angle CBA_1$, или $A>180°-B$ и, следовательно, $A+B>180°$.

Аналогично доказывается обратная теорема:

Теорема 7. *Если сумма двух углов сферического треугольника больше, равна или меньше* 180°, *то и сумма*

противолежащих им сторон должна быть соответственно больше, равна или меньше 180°.

Теорема 8. *Если разность двух сторон сферического треугольника больше, равна или меньше* 0, *то и разность двух противолежащих им углов больше, равна или меньше* 0.

Доказательство. Пусть две стороны сферического треугольника a и b связаны соотношением $a - b > 0$. Перенося b в правую часть, находим: $a > b$. Тогда согласно теореме 5 $A > B$ или $A - B > 0$.

Таким образом, если $a - b > 0$, то и $A - B > 0$.

Аналогично доказываются два других утверждения:

$$\text{если } a - b = 0, \quad \text{то и } A - B = 0,$$

и

$$\text{если } a - b < 0, \quad \text{то и } A - B < 0.$$

Совершенно так же, только на основании теоремы 4, доказывается и

Теорема 9. *Если разность двух углов сферического треугольника больше, равна или меньше* 0, *то и разность двух противолежащих им сторон больше, равна или меньше* 0.

Соотношения между сторонами и углами сферического треугольника, выраженные в теоремах 4 и 5, или, в другой форме, в теоремах 6 и 8, составляют пятое и шестое условия существования сферического треугольника. Иногда свойства, описанные в теоремах 4—6 и 8, рассматривают как 5—8 условия существования. Последнее недостаточно строго, поскольку теоремы 6 и 8 и 5 и 4 соответственно взаимосвязаны.

§ 7. Равенство и симметрия сферических треугольников

Сферические треугольники, лежащие на одной и той же сфере, равны между собой, если они при наложении совпадают. Это будет тогда, когда данные равные части сферических треугольников расположены в них одинаковым образом и выполняется хотя бы одно из нижеследующих условий:

1) сферические треугольники имеют по две соответственно равные стороны и по равному углу, заключенному между этими сторонами;

2) сферические треугольники имеют по равной стороне и по два соответственно равных угла, прилежащих к этой стороне;

3) сферические треугольники имеют по три соответственно равные стороны;

4) сферические треугольники имеют по три соответственно равных угла.

Доказательство выполнения первых трех условий осуществляется методом наложения. Обозначим углы одного сферического треугольника A, B, C, а противолежащие им стороны a, b, c; углы и стороны другого сферического треугольника — соответственно A_1, B_1, C_1 и a_1, b_1, c_1. Если сферический треугольник $A_1B_1C_1$, перемещая его по сфере, возможно наложить на сферический треугольник ABC таким образом, чтобы были совмещены все их одноименные элементы (углы и стороны), то доказательства равенства обоих совмещенных сферических треугольников производятся так же, как это делается в геометрии для плоских треугольников.

Доказательство четвертого случая равенства производится методом построения двух сферических треугольников, полярных относительно данных сферических треугольников. Пусть даны два сферических треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, для которых осуществляется четвертое условие, т. е. $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$. Для доказательства равенства данных сферических треугольников между собой построим полярные им сферические треугольники $A'B'C'$ и $A_1'B_1'C_1'$.

На основании известных свойств полярных сферических треугольников (§ 5) будут справедливы следующие равенства:

$$A + a' = 180°, \quad A_1 + a_1' = 180°,$$

$$B + b' = 180°, \quad B_1 + b_1' = 180°,$$

$$C + c' = 180°, \quad C_1 + c_1' = 180°.$$

Так как, по условию, $A = A_1$, $B = B_1$ и $C = C_1$, то будут справедливы равенства: $a' = a_1'$, $b' = b_1'$ и $c' = c_1'$, т. е. сферические треугольники $A'B'C'$ и $A_1'B_1'C_1'$, полярные данным сферическим треугольникам ABC и

$A_1B_1C_1$, будут равны друг другу по трем соответственно равным сторонам (по третьему условию равенства сферических треугольников).

Из равенства полярных сферических треугольников $A'B'C'$ и $A_1'B_1'C_1'$ следует, что соответственные углы их равны между собой, т. е.

$$A' = A_1', \quad B' = B_1', \quad C' = C_1'.$$

Так как углы полярных сферических треугольников

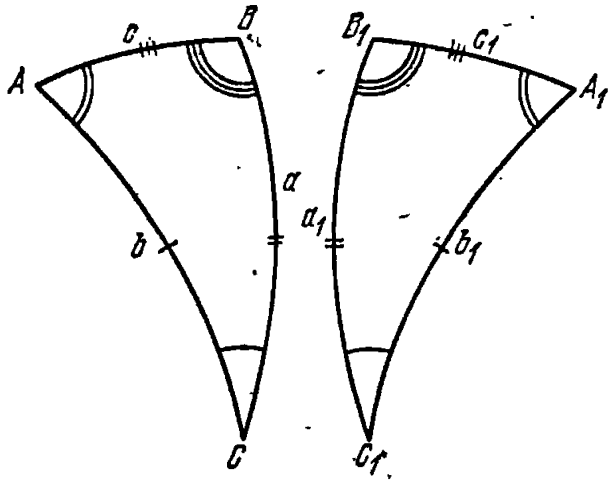

Рис. 19.

являются дополнениями до 180° сторон данных сферических треугольников, то можно написать соотношения

$$A' + a = 180°, \quad A_1' + a_1 = 180°,$$
$$B' + b = 180°, \quad B_1' + b_1 = 180°,$$
$$C' + c = 180°, \quad C_1' + c_1 = 180°.$$

Из этих соотношений следует, что $a = a_1$, $b = b_1$ и $c = c_1$, т. е., что данные сферические треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют также и соответственно равные стороны. Отсюда на основании третьего условия равенства сферических треугольников, заключаем, что дан-

ные сферические треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны между собой.

Два сферических треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 19) могут иметь соответственно равновеликие элементы:

$$A = A_1,\ B = B_1,\ C = C_1,\ a = a_1,\ b = b_1,\ c = c_1,$$

но расположенные на сфере в различном порядке: нумерация вершин в треугольнике ABC идет по ходу часовой стрелки, а в треугольнике $A_1B_1C_1$ — против хода часовой стрелки. При таком расположении элементов сферический треугольник $A_1B_1C_1$ не может быть наложен на сферический треугольник ABC ни в результате

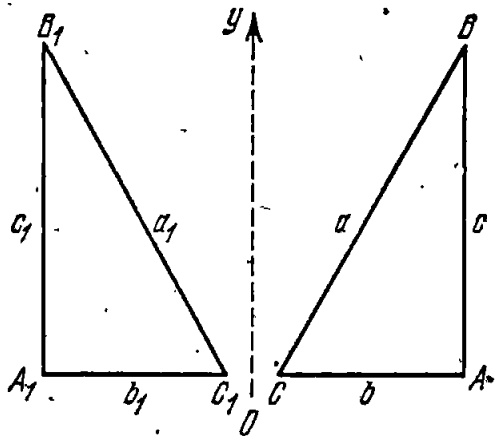

Рис. 20.

его перемещения по сфере (при совмещении вершин C_1 и C и сторон c_1 и c вершина A_1 должна совмещаться с B, а вершина B_1 с A, но $A_1 \neq B$ и $B_1 \neq A$), ни в результате вращения его вокруг стороны $A_1B_1(AB)$, так как при этом стороны a, b и c не совместятся с соответствующими им сторонами a_1, b_1 и c_1, выпуклости которых будут попарно противоположны; не произойдет и совмещения поверхностей сферических треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.

Для совмещения соответствующих сторон и поверхностей сферических треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC потребуется еще их выгибание. Но выгибание поверхности сферического треугольника равносильно перемещению центра сферы. Равновеликие, но не

налагающиеся друг на друга сферические треугольники называются *симметричными сферическими треугольниками.*

Сходный пример можно привести и для плоских треугольников. Так, например, равновеликие прямоугольные треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC (рис. 20), симметрично расположенные относительно вертикальной оси Oy, нельзя совместить друг с другом без вращения, т. е. без выхода из плоскости их расположения. Однако плоские (и сферические) равнобедренные симметричные треугольники могут быть совмещены без вращения, хотя, перемещая их по плоскости, нельзя добиться совпадения в них соответственных элементов (вершин A с A_1 и C с C_1, а также сторон a с a_1 и c с c_1).

ГЛАВА III

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 8. Формулы косинусов сторон и углов

Теорема косинуса стороны является основной теоремой сферической тригонометрии, так как из нее могут быть выведены все последующие формулы. Она устанавливает зависимость между тремя сторонами и одним из углов сферического треугольника. Эта теорема была впервые доказана Альбатегнием в X в.

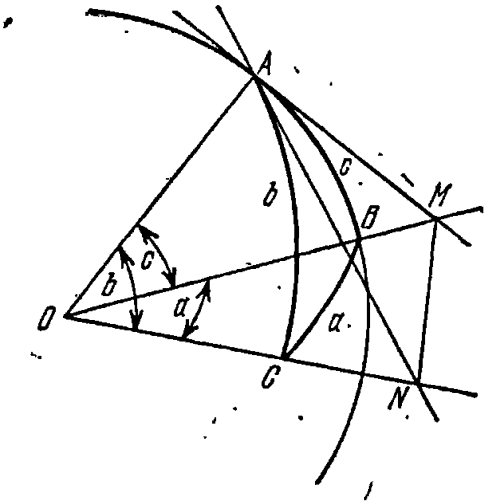

Рис. 21.

Пусть имеется сферический треугольник ABC, стороны b и c которого меньше 90° (рис. 21). Соединим все его вершины отрезками прямых с центром сферы O и через вершину A проведем касательные к сторонам

b и c до пересечения их с продолжением радиусов OB и OC в точках M и N. Соединим точки M и N отрезком прямой. По формуле косинусов для плоских треугольников AMN и OMN находим

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos A,$$

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos a,$$

откуда, приравнивая правые части, получаем

$$AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos A = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos a,$$

$$OM^2 + ON^2 - AM^2 - AN^2 + 2AM \cdot AN \cdot \cos A = 2OM \cdot ON \cdot \cos a. \quad (17)$$

Но из плоских прямоугольных треугольников AOM и AON следует: $OM^2 = OA^2 + AM^2$ и $ON^2 = OA^2 + AN^2$. Подставляя эти значения в левую часть равенства (17), получим

$$2OM \cdot ON \cdot \cos a = OA^2 + AM^2 + OA^2 + AN^2 - AM^2 - AN^2 + 2AM \cdot AN \cdot \cos A$$

и далее: $2OM \cdot ON \cdot \cos a = 2OA^2 + 2AM \cdot AN \cdot \cos A$. Наконец имеем

$$OM \cdot ON \cdot \cos a = OA^2 + AM \cdot AN \cdot \cos A.$$

Из последнего равенства найдем выражение для $\cos a$:

$$\cos a = \frac{OA \cdot OA}{OM \cdot ON} + \frac{AM \cdot AN}{OM \cdot ON} \cdot \cos A.$$

Согласно рис. 21 мы можем написать

$$\frac{OA}{OM} = \cos c, \quad \frac{OA}{ON} = \cos b, \quad \frac{AM}{OM} = \sin c, \quad \frac{AN}{ON} = \sin b.$$

Подставив эти значения в предыдущее равенство, получим окончательную формулу:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad (18)$$

Методом круговой перестановки элементов *) ана-

*) При круговой перестановке элементов сферического треугольника каждая из сторон и каждый из углов заменяются в формуле последующими по ходу сторонами и углами (считая в любом направлении), при этом последний элемент всегда заменяется первым.

логичные формулы находятся также для сторон b и c сферического треугольника ABC:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \qquad (19)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \qquad (20)$$

Полученные формулы читаются: *косинус стороны сферического треугольника равен произведению косинусов двух других его сторон, сложенному с произведением синусов тех же сторон, умноженным на косинус угла между ними.*

Теперь покажем, что формулы (18)—(20) косинуса стороны, выведенные для частного случая, когда две стороны сферического треугольника меньше 90°, остаются справедливы и для любого сферического треугольника Эйлера.

Пусть дан сферический треугольник ABC, стороны которого b и c больше 90° и меньше 180° (рис. 22). Значения стороны a и противолежащего ей угла A при выводе формулы (18) не были ограничены и поэтому в треугольнике Эйлера они подчиняются условию: $0° < a < 180°$, и $0° < A < 180°$.

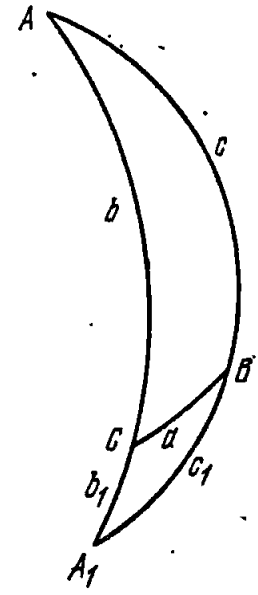

Рис. 22.

Продолжим стороны b и c сферического треугольника ABC до их взаимного пересечения на сфере в точке A_1. В сопряженном данному треугольнику сферическом треугольнике A_1BC будем иметь

$$b_1 = 180° - b < 90°;$$

$$c_1 = 180° - c < 90°;$$

$$\angle A_1 = \angle A.$$

Для сферического треугольника A_1BC справедлива формула (18), поэтому для него можно написать равенство

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1. \qquad (21)$$

Но так как $a_1 = a$, $\cos b_1 = -\cos b$, $\cos c_1 = -\cos c$, $\sin b_1 = \sin b$, $\sin c_1 = \sin c$ и $\cos A_1 = \cos A$, то написанное выше равенство примет вид

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

что и требовалось доказать.

Приведем еще доказательство теоремы косинуса стороны сферического треугольника, выполненное методами векторной алгебры.

Пусть имеем сферический треугольник ABC, расположенный на сфере единичного радиуса (рис. 23). Из центра O сферы проведем к вершинам A, B и C сферического треугольника ABC радиусы-векторы, соответственно равные l_1, l_2 и l_3 и примем, что их длина равна единице. Дополним каждую из сторон AB и AC до 90° и проведем к их концам D и E радиусы-векторы r_1 и r_2. Обозначим проекцию вектора l_2 на вектор l_1 как $\text{пр}_{l_1} l_2$, а на вектор r_2 как $\text{пр}_{r_2} l_2$ и т. д. Тогда в соответствии с рис. 23 можно написать соотношения:

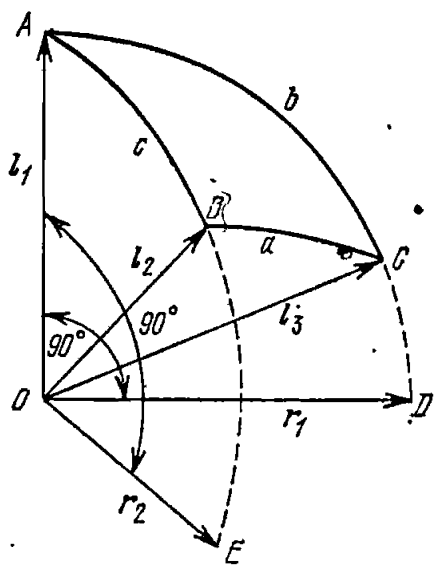

Рис. 23.

$$\text{пр}_{l_1} l_2 = \cos c;$$

$$\text{пр}_{r_2} l_2 = \sin c;$$

$$\text{пр}_{l_1} l_3 = \cos b;$$

$$\text{пр}_{r_1} l_3 = \sin b.$$

Пользуясь формулой разложения вектора по двум неколлинеарным векторам и рассматривая векторы l_1, r_1 и r_2 как единичные, устанавливаем, что

$$l_2 = l_1 \cos c + r_2 \sin c \quad \text{и} \quad l_3 = l_1 \cos b + r_1 \sin b.$$

Перемножив почленно оба последних равенства, получим

$$l_2 l_3 = l_1 \cos c \cdot l_1 \cos b + l_1 \cos c \cdot r_1 \sin b + r_2 \sin c \cdot l_1 \cos b + r_2 \sin c \cdot r_1 \sin b.$$

Но так как

$$l_2 l_3 = \cos a, \quad l_1^2 = 1, \quad l_1 r_1 = 0, \quad l_1 r_2 = 0,$$

$r_1 r_2 = \cos A$, то на этом основании приходим к формуле (18).

Перейдем теперь к выводу формулы косинуса угла сферического треугольника. Пусть имеются два взаимно полярных сферических треугольника со сторонами и углами a, b, c, A, B, C и a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1. Напишем формулу косинуса для стороны a_1 полярного треугольника $A_1B_1C_1$:

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1.$$

В § 5 было показано, что для двух взаимно полярных сферических треугольников справедливы следующие соотношения:

$$a_1 = 180° - A, \quad A_1 = 180° - a,$$
$$b_1 = 180° - B, \quad B_1 = 180° - b,$$
$$c_1 = 180° - C, \quad C_1 = 180° - c.$$

Пользуясь этими соотношениями, формулу косинуса стороны a_1 полярного сферического треугольника можно представить в виде

$$\cos(180° - A) = \cos(180° - B) \cdot \cos(180° - C) + \\ + \sin(180° - B) \cdot \sin(180° - C) \cdot \cos(180° - a)$$

или, после упрощения,

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a,$$

или, окончательно:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \qquad (22)$$

Пользуясь методом круговой перестановки элементов сферического треугольника, можно получить аналогичные формулы также и для его углов B и C:

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \qquad (23)$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \qquad (24)$$

Формулы (22)—(24) читаются следующим образом: *косинус угла сферического треугольника равен отрицательному произведению косинусов двух его других углов, сложенному с произведением синусов тех же углов, умноженным на косинус стороны, противолежащей первому углу.*

§ 9. Формулы синусов

Теорема синусов, записываемая с помощью *формул синусов*, выражает зависимость между двумя сторонами сферического треугольника и противолежащими им углами.

Пусть имеем сферический треугольник ABC, все углы и стороны которого имеют значения, меньшие 90° (рис. 24). Вершины A, B и C сферического треугольника соединим с центром сферы O радиусами

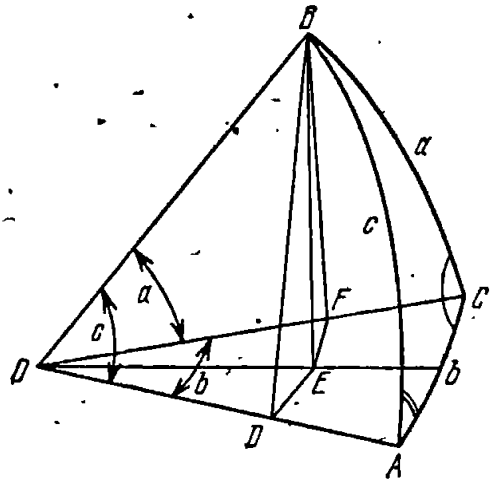

Рис. 24.

$OA = OB = OC$ и из вершины B опустим перпендикуляр BE на плоскость AOC. Центральные углы BOC, COA и AOB численно равны соответствующим им дугам a, b и c. Проведем еще через прямую BE плоскости, перпендикулярные к прямым OA и OC. Они пересекут прямые OA и OC в точках D и F. Линейные углы EFB и EDB равны соответственно углам при вершинах C и A сферического треугольника ABC.

Непосредственно из рис. 24 следует, что

$$BE = BF \sin C \text{ и } BE = BD \sin A.$$

Но $BF = BO \sin a$ и $BD = BO \sin c$. Подставляя эти значения BF и BD в первые два равенства, получаем

$$BE = BO \sin a \sin C \text{ и } BE = BO \sin c \sin A,$$

Приравнивая правые части, находим, что $BO \sin a \sin C = BO \sin c \cdot \sin A$. После сокращения на BO имеем

$$\sin a \sin C = \sin c \sin A$$

или окончательно:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Рассуждая аналогичным образом применительно к сторонам a и b, а также к углам A и B того же сферического треугольника ABC, будем иметь

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Наконец, объединяя последние два равенства воедино, получаем *формулу синусов*:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}, \tag{25}$$

которая читается так: в сферическом треугольнике *синусы его сторон пропорциональны синусам противолежащих им углов*.

Докажем теперь, что формула (25), выведенная для частного случая, когда $a < 90°$, $b < 90°$, $c < 90°$, $A < 90°$, $B < 90°$ и $C < 90°$, будет справедлива также и для любого треугольника Эйлера. Пусть треугольник Эйлера удовлетворяет условиям:

$$90° < a < 180°,\ 90° < b < 180°,\ 90° < c < 180°$$

и

$$90° < A < 180°,\ 90° < B < 180°,\ 90° < C < 180°,$$

при соблюдении которых формула (25) запишется так:

$$\frac{\sin (180° - a)}{\sin (180° - A)} = \frac{\sin (180° - b)}{\sin (180° - B)} = \frac{\sin (180° - c)}{\sin (180° - C)}.$$

Применяя же известные из плоской тригонометрии формулы приведения функций к острому углу, получим формулу (25).

Формулу синусов можно вывести также из основной формулы (18) сферической тригонометрии. Записав формулу (18) в виде

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

выводим

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

или

$$\sin^2 A =$$

$$= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} =$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a}{\sin^2 b \sin^2 c} -$$

$$- \frac{\cos^2 b \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Разделив затем обе части равенства на $\sin^2 a$, найдем

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

и, по извлечении квадратного корня, получим

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Перед знаком корня ставим только один знак «плюс», так как углы и стороны сферических треугольников всегда меньше 180°, и, следовательно, их синусы всегда положительны.

Правая часть полученного выражения симметрична относительно косинусов и синусов трех сторон, следовательно, она не меняет своего значения от перестановки сторон и поэтому

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = M, \qquad (25')$$

где

$$M = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c},$$

называется *модулем сферического треугольника.*

Теорема синусов может быть доказана также с помощью векторной алгебры.

В соответствии с принятыми на рис. 23 обозначениями имеем

$$l_1 l_2 = \cos c,\ l_2 l_3 = \cos a,\ l_1 l_3 = \cos b$$

и, кроме того, $|[l_1 l_2]| = |[l_2 l_1]| = \sin c$, $|[l_2 l_3]| = |[l_3 l_2]| = \sin a$, $|[l_3 l_1]| = |[l_1 l_3]| = \sin b$. Но так как $[l_1 l_2]$ — это вектор, перпендикулярный к плоскости OAB, а вектор $[l_1 l_3]$ перпендикулярен к плоскости OAC, то угол между ними равен двугранному углу между плоскостями OAB и OAC, т. е. углу A сферического треугольника ABC.

Теперь составим векторное произведение векторов $[l_1 l_2]$ и $[l_1 l_3]$. Пользуясь известной формулой разложения двойного векторного произведения, получим

$$[[l_1 l_2][l_1 l_3]] = l_1 (l_1 l_2 l_3),$$

которое можно написать в виде

$$[[l_1 l_2][l_1 l_3]] = [l_1 l_2 l_3],$$

или через тригонометрические функции, как

$$[l_1 l_2 l_3] = \sin c \sin b \sin A.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим еще два соотношения для углов B и C сферического треугольника ABC:

$$[l_2 l_3 l_1] = \sin a \sin c \sin B \text{ и } [l_3 l_1 l_2] = \sin b \sin a \sin C.$$

Приравнивая между собой правые части всех трех последних соотношений, получим

$$\sin c \sin b \sin A = \sin a \sin c \sin B = \sin b \sin a \sin C.$$

Наконец, разделив все члены последнего выражения на $\sin a \sin b \sin c$ и поменяв местами члены отношений, придем в итоге к той же формуле (25).

Запишем выражение для модуля сферического треугольника:

$$M = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Возводя в квадрат обе части этого равенства и осво-

бождаясь от знаменателя, получим

$$M^2 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c =$$
$$= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

или, иначе,

$$2 \cos a \cos b \cos c =$$
$$= M^2 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c - 1 + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c.$$

Прибавляя и вычитая в правой части $\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c$, будем иметь $2\cos a \cos b \cos c = (M^2 - 1) \sin^2 a \sin^2 b \times \times \sin^2 c + \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c - 1 + \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c$, или в другом виде:

$$2 \cos a \cos b \cos c = (M^2 - 1) \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c +$$
$$+ \cos^2 a (1 - \sin^2 b \sin^2 c) + \cos^2 b \cos^2 c. \quad (26)$$

В правой части формулы (26) два последних члена суть величины всегда положительные, поэтому левая ее часть будет положительна тогда, когда модуль $M \geqslant 1$. Но в левой части формулы (26) содержатся три сомножителя, которые могут быть величинами как положительными, так и отрицательными. Чтобы левая часть формулы (26) не была в этом случае отрицательной, нужно, чтобы ни один из косинусов не был отрицательным, либо чтобы отрицательными были два из них. Таким образом, мы доказали такую теорему:

Теорема. *Если модуль сферического треугольника больше единицы (или равен ей), то или все три стороны его меньше* 90°, *или же только одна из сторон меньше* 90°.

Из этой теоремы путем построения сферического треугольника, полярного данному, можно доказать теорему, аналогичную теореме относительно углов сферического треугольника: *если модуль сферического треугольника меньше единицы (или равен ей), то или все три угла его больше* 90°, *или же только один из углов больше* 90°.

§ 10. Формулы пяти и четырех элементов

Формулы пяти элементов дают зависимость между пятью элементами сферического треугольника. Возьмем формулы косинусов для сторон a и b сферическо-

го треугольника ABC:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

Умножим первое равенство на $\cos c$:

$$\cos a \cos c = \cos b \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c \cos A$$

и подставим получившееся выражение для $\cos a \cos c$ во второе равенство:

$$\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c \cos A + \\ + \sin a \sin c \cos B.$$

Перенесем слагаемое $\cos b \cos^2 c$ в левую часть последнего равенства:

$$\cos b(1 - \cos^2 c) = \sin a \sin c \cos B + \\ + \sin b \sin c \cos c \cos A.$$

Так как $1 - \cos^2 c = \sin^2 c$, то, сократив обе части полученного выражения на $\sin c$, найдем

$$\cos b \sin c = \sin a \cos B + \sin b \cos c \cos A,$$

или, в окончательной форме,

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \quad (27)$$

Соотношение (27) называется *формулой пяти элементов;* она читается следующим образом: *произведение синуса стороны на косинус прилежащего к ней угла равно произведению косинуса на синус двух других сторон минус произведение синуса на косинус этих же сторон, умноженное на косинус угла между этими сторонами.* При этом в правой части первым берется косинус стороны, противолежащей углу, косинус которого находится в левой части. В формуле пяти элементов выражается зависимость между тремя сторонами и двумя углами сферического треугольника.

Общее число таких формул равно шести, остальные пять формул можно получить из формулы (27) путем

круговой перестановки в ней элементов (букв) сферического треугольника:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin a\cos C = \cos c\sin b - \sin c\cos b\cos A,\\
&\sin b\cos C = \cos c\sin a - \sin c\cos a\cos B,\\
&\sin b\cos A = \cos a\sin c - \sin a\cos c\cos B,\\
&\sin c\cos A = \cos a\sin b - \sin a\cos b\cos C,\\
&\sin c\cos B = \cos b\sin a - \sin b\cos a\cos C.
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Формулы (27) и (28) однородны относительно $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, которые можно заменить в них величинами, им пропорциональными. Так как синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов, то из формул (27), (28) можно найти зависимость между его двумя сторонами и тремя углами.

Обозначим величину, обратную M, буквой N. Тогда согласно формуле (25′)

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{1}{M} = N,$$

откуда

$$\sin a = N\sin A,\ \sin b = N\sin B,\ \sin c = N\sin C.$$

Подставив эти значения $\sin a$, $\sin b$ и $\sin c$ в формулы (27) и (28) и сократив все члены на N, получим шесть формул, устанавливающих зависимость между двумя сторонами и тремя углами сферического треугольника:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin A\cos B = \cos b\sin C - \cos c\sin B\cos A,\\
&\sin A\cos C = \cos c\sin B - \cos b\sin C\cos A,\\
&\sin B\cos C = \cos c\sin A - \cos a\sin C\cos B,\\
&\sin B\cos A = \cos a\sin C - \cos c\sin A\cos B,\\
&\sin C\cos A = \cos a\sin B - \cos b\sin A\cos C,\\
&\sin C\cos B = \cos b\sin A - \cos a\sin B\cos C.
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Разделив почленно соотношение (27) на равенство

$$\sin a\sin B = \sin A\sin b,$$

вытекающее из формулы (25), будем иметь

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\sin c \operatorname{ctg} b}{\sin A} - \frac{\cos c \cos A}{\sin A}.$$

Полученное выражение напишем в виде

$$\operatorname{ctg} B \sin A = \sin c \operatorname{ctg} b - \cos c \cos A,$$

или, в окончательной форме,

$$\cos c \cos A = \sin c \operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} B \sin A. \quad (30)$$

Соотношение (30) называется *формулой четырех элементов*. Оно определяет зависимость между двумя сторонами и двумя углами сферического треугольника. Общее число формул четырех элементов также равно шести. Пять остальных формул получаются в результате круговой перестановки элементов сферического треугольника в формуле (30):

$$\left.\begin{aligned}
&\cos a \cos B = \sin a \operatorname{ctg} c - \operatorname{ctg} C \sin B,\\
&\cos b \cos A = \sin b \operatorname{ctg} c - \operatorname{ctg} C \sin A,\\
&\cos b \cos C = \sin b \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} A \sin C,\\
&\cos c \cos B = \sin c \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} A \sin B,\\
&\cos a \cos C = \sin a \operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} B \sin C.
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

§ 11. Формулы половинных углов и сторон

Формулы половинных углов выражают углы сферического треугольника в функциях его сторон.

Из основной формулы (18) для стороны a сферического треугольника ABC выразим величину $\cos A$:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Вычтем из единицы обе части этого равенства:

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Применяя известные тригонометрические формулы, получим

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Но так как

$$\sin b \sin c + \cos b \cos c = \cos(b - c),$$

то

$$2\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Заменяя в числителе последнего соотношения разность косинусов и сокращая на два, будем иметь

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}.$$

Далее обозначим через $2p$ периметр сферического треугольника ABC, т. е. $a + b + c = 2p$. Отсюда будем иметь $a + b - c + 2c = 2p$ или $a + b - c = 2(p - c)$ или $\frac{a+b+c}{2} = p - c$, точно так же как $\frac{a+c-b}{2} = p - b$. Подставив эти выражения в предыдущую формулу, получим

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-b)}{\sin b \sin c}}. \qquad (32)$$

Затем путем круговой перестановки элементов сферического треугольника ABC получим аналогичные формулы и для двух других его углов:

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin c}}, \qquad (33)$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a \sin b}}. \qquad (34)$$

Выполнив преобразования, подобные предыдущим, можно получить формулы для косинуса половинного угла:

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

откуда

$$2\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c},$$

далее

$$2\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c},$$

и, наконец,

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c}.$$

Затем, введя периметр сферического треугольника и выполнив необходимые преобразования, получим

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}. \qquad (35)$$

Произведя круговую перестановку элементов сферического треугольника ABC, можно получить аналогичные формулы и для двух других его углов:

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}}, \qquad (36)$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}. \qquad (37)$$

Теперь из отношений синусов половинных углов к косинусам тех же самых половинных углов находим выражения для тангенсов половинных углов сферического треугольника:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}, \qquad (38)$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}}, \qquad (39)$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}. \qquad (40)$$

Во всех формулах (32)—(40) взяты лишь положительные корни, потому что для треугольников Эйлера величины углов $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$ не могут быть бо́льшими 90°.

Полученные выражения для синуса и косинуса половинного угла позволяют найти формулу синуса целого угла сферического треугольника в функции его сторон.

Так как $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, то, подставляя вместо сомножителей в правой части их значения из

формул (32) и (35), будем иметь

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)} \quad (41)$$

и, аналогично,

$$\sin B = \frac{2}{\sin a \sin c} \sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}, \quad (42)$$

$$\sin C = \frac{2}{\sin a \sin b} \sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}. \quad (43)$$

Формулы половинных сторон дают выражения для сторон сферического треугольника в функции его углов и эксцесса.

Для сферического треугольника ABC эти формулы выводятся из формул его половинных углов на основании свойств полярного ему сферического треугольника. Пусть имеется сферический треугольник ABC и полярный ему сферический треугольник $A_1B_1C_1$. В соответствии с формулами (13) и (14) можно написать:

$$A_1 = 180° - a, \quad a_1 = 180° - A,$$
$$B_1 = 180° - b, \quad b_1 = 180° - B,$$
$$C_1 = 180° - c, \quad c_1 = 180° - C.$$

Периметр полярного сферического треугольника $A_1B_1C_1$ можно представить в виде $2p_1 = a_1 + b_1 + c_1 = 180° - A + 180° - B + 180° - C = 360° - (A + B + C - 180°) = 360° - \varepsilon$. Отсюда

$$p_1 = 180° - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Разности между полупериметром p_1 сферического треугольника $A_1B_1C_1$ и его сторонами a_1, b_1, c_1 будут

$$p_1 - a_1 = p_1 - (180° - A) = A - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$p_1 - b_1 = p_1 - (180° - B) = B - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$p_1 - c_1 = p_1 - (180° - C) = C - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Наконец, пользуясь формулами половинных углов сферического треугольника, можно написать

$$\sin\frac{A_1}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)=$$

$$=\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin(180^\circ-B)\sin(180^\circ-C)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\cdot\sin C}} \qquad (44)$$

и далее:

$$\cos\frac{A_1}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)=$$

$$=\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(180^\circ-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin(180^\circ-B)\sin(180^\circ-C)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\cdot\sin C}}. \qquad (45)$$

Разделив $\sin\frac{a}{2}$ на $\cos\frac{a}{2}$, получим формулу для тангенса половины стороны:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}. \qquad (46)$$

Аналогичным образом выводятся формулы тех же функций для двух других сторон b и c сферического треугольника ABC:

$$\sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin C}}, \qquad (47)$$

$$\sin\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B}}, \qquad (48)$$

$$\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin C}},\qquad(49)$$

$$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B}},\qquad(50)$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},\qquad(51)$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}.\qquad(52)$$

Формулы половинных углов (32)—(40) и половинных сторон (46)—(52) могут быть использованы для определения сторон сферического треугольника по данным его углам. Эти формулы широко применялись при вычислениях с логарифмами, но в настоящее время используются редко.

§ 12. Формулы Деламбра и аналогии Непера

Формулы Деламбра (независимо от него полученные Гауссом и Мольвейде) выражают зависимость между всеми шестью элементами сферического треугольника.

Подставим в известную формулу тригонометрии синуса полусуммы углов

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

выведенные в предыдущем параграфе значения синусов и косинусов половинных углов:

$$\sin\frac{A+B}{2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}}+$$

$$+\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}$$

Полученное равенство преобразуем к виду

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin p}{\sin a\sin b}}+$$

$$+\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin p}{\sin a\sin b}}.$$

Но так как по формуле (37)

$$\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin p}{\sin a\sin b}}=\cos\frac{C}{2},$$

то предыдущее равенство упрощается:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\cdot\cos\frac{C}{2}+\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\cdot\cos\frac{C}{2}.$$

Преобразуем затем правую часть последнего равенства, представив $\sin(p-b)+\sin(p-a)$ по формуле суммы синусов, а $\sin c$ — по формуле синуса двойного угла:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{2\sin\frac{2p-a-b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2}.$$

Наконец, замечая, что

$$\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{2p-a-b}{2},$$

выполним сокращение в правой части последнего выражения и получим *первую формулу Деламбра:*

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2}. \qquad (53)$$

Аналогичным образом выводится и *вторая формула Деламбра:*

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2}. \qquad (54)$$

Третья и четвертая формулы Деламбра выводятся из известной формулы тригонометрии:

$$\cos\frac{A\pm B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\mp\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Выполнив такие же преобразования, как и при выводе первых двух формул, получим

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin\frac{C}{2}, \tag{55}$$

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cdot\sin\frac{C}{2}, \tag{56}$$

Пользуясь формулами Деламбра, можно вывести свойство однородности сферического треугольника Эйлера (§ 6). Например, в третьей формуле Деламбра величины $\sin\frac{C}{2}$ и $\cos\frac{c}{2}$ всегда положительны, поэтому для существования равенства требуется, чтобы косинус полусуммы сторон и косинус полусуммы углов имели бы одинаковые знаки, т. е. если $\frac{a+b}{2}$ больше, равно или меньше 90°, то и $\frac{A+B}{2}$ больше, равно или меньше 90°, или если $a+b$ больше, равно или меньше 180°, то и $A+B$ больше, равно или меньше 180°.

Из формул Деламбра выводятся важные соотношения, называемые *аналогиями Непера*. Аналогии Непера выражают зависимость между пятью элементами сферического треугольника: тремя углами и двумя сторонами или двумя углами и тремя сторонами. Ими пользуются для решения сферических треугольников, когда известны две стороны и угол между ними, или два угла и сторона между ними.

Если разделить первую формулу Деламбра (53) на третью (55), а вторую (54) на четвертую (56), то получим две *аналогии Непера* для углов сферического треугольника:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}, \tag{57}$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}. \qquad (58)$$

Если же разделить вторую формулу (54) на первую (53), а четвертую формулу (56) на третью (55), то получим две аналогии Непера для сторон сферического треугольника:

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}, \qquad (59)$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}. \qquad (60)$$

Здесь дан вывод лишь четырех аналогий Непера (для углов $\frac{A+B}{2}$ и $\frac{A-B}{2}$, а также для сторон $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$), общее же число их равно двенадцати. Прочие восемь аналогий для углов $\frac{A+C}{2}$, $\frac{A-C}{2}$, $\frac{B+C}{2}$ и $\frac{B-C}{2}$, а также для сторон $\frac{a+c}{2}$, $\frac{a-c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ и $\frac{b-c}{2}$ получаются в результате круговой перестановки элементов (букв) сферического треугольника.

Почленное деление третьей аналогии (59) Непера на четвертую (60) дает контрольную *формулу Гаусса*:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}, \qquad (61)$$

используемую для проверки вычислений, выполняемых по формулам Деламбра и аналогиям Непера.

Эту же формулу (61) Гаусса можно получить из формулы синусов (25)

$$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

Из членов написанных отношений составим производную пропорцию

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$$

и преобразуем ее к виду

$$\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}} = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}},$$

откуда и приходим к выражению (61).

§ 13. Прямоугольные и прямосторонние сферические треугольники

Рассмотрим прямоугольный сферический треугольник ABC, у которого угол $A = 90°$ (рис. 25). Его сторона a, противолежащая прямому углу A, называется гипотенузой, а стороны b и c — катетами.

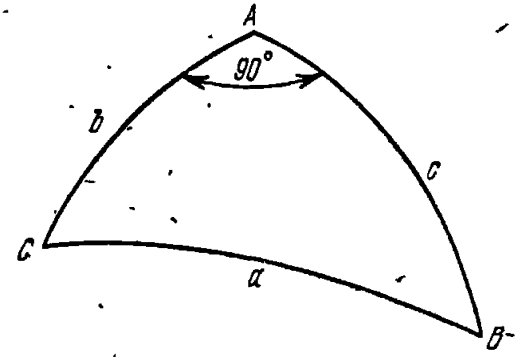

Рис. 25.

Напишем формулу косинуса стороны a:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Так как $A = 90°$, то $\cos A = 0$, и формула принимает вид

$$\cos a = \cos b \cos c. \qquad (62)$$

Последнее равенство выражает теорему Пифагора сферической геометрии и читается так: *косинус гипотенузы равен произведению косинусов катетов*.

Теперь напишем другие, известные уже нам формулы сферической тригонометрии, содержащие угол A:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

(формулы (22)—(24) § 8),

$$\sin b = \sin a \frac{\sin B}{\sin A} \text{ и } \sin c = \sin a \frac{\sin C}{\sin A},$$

(формулы § 9), и, наконец,

$$\cos c \cos A = \sin c \operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} B \sin A,$$
$$\cos b \cos A = \sin b \operatorname{ctg} c - \operatorname{ctg} C \sin A,$$
$$\cos b \cos C = \sin b \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} A \sin C,$$
$$\cos c \cos B = \sin c \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} A \sin B$$

(формулы (30), (31) § 10).

Но так как $\cos A = 0$, $\operatorname{ctg} A = 0$ и $\sin A = 1$, то все написанные формулы примут весьма простой вид, удобный для решения прямоугольных сферических треугольников:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos a = \cos b \cos c, & \cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C, \\ \cos B = \cos b \sin C, & \sin b = \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c, \\ \cos C = \cos c \sin B, & \sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b, \\ \sin b = \sin a \sin B, & \cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c, \\ \sin c = \sin a \sin C, & \cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b. \end{array}\right\} \quad (63)$$

Так как из пяти элементов (углов B, C и сторон a, b, c) прямоугольного сферического треугольника можно составить только 10 сочетаний по 3 $\left(C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10\right)$, то формулами (63) исчерпываются все соотношения между его элементами.

В первой из формул (63) левая часть ($\cos a$) может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Если $\cos a > 0$, то косинусы обоих катетов

должны иметь одинаковые знаки, а это может быть, когда обе стороны меньше 90° или когда они больше 90°. Если же $\cos a < 0$, что может быть при $a > 90°$, то косинусы обеих сторон, входящих в правую часть, должны иметь различные знаки, что может быть тогда, когда одна сторона больше 90°, а другая меньше 90°.

На основании сказанного приходим к выводу, что *в прямоугольном сферическом треугольнике или все*

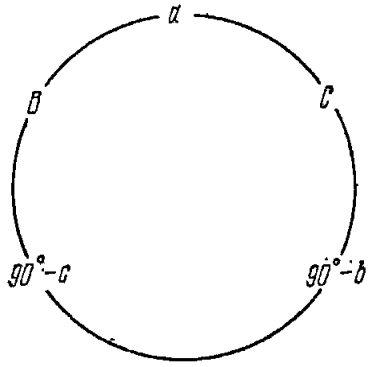

Рис. 26.

три стороны меньше 90°, или только одна сторона меньше 90°.

В седьмой и восьмой формулах (63) $\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B$ и $\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C$, $\sin c$ и $\sin b$ будут всегда положительны, поэтому в преобразованных формулах знак у $\operatorname{tg} b$ будет тот же, что и у $\operatorname{tg} B$, а знак у $\operatorname{tg} c$ тот же, что у $\operatorname{tg} C$. Отсюда можно заключить, что *катеты прямоугольного сферического треугольника и углы, им противолежащие, всегда располагаются в одной и той же четверти круга.*

Французский математик Модюи предложил удобное правило для запоминания приведенных выше формул. Заменив катеты прямоугольного сферического треугольника их дополнениями до 90°, и расположив по окружности пять элементов a, C, $90° - b$, $90° - c$, B (прямой угол A исключается из счета), получим фигуру, каждый элемент которой имеет два соседних элемента и два дальних (рис. 26). Тогда формулы (63)

можно переписать в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \sin(90^\circ - b)\sin(90^\circ - c),\\ \cos B &= \sin(90^\circ - b)\sin C,\\ \cos C &= \sin(90^\circ - c)\sin B,\\ \cos(90^\circ - b) &= \sin a \sin B,\\ \cos(90^\circ - c) &= \sin a \sin C, \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

т. е. *косинус каждого элемента прямоугольного сферического треугольника равен произведению синусов двух дальних элементов.*

Далее:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,\\ \cos(90^\circ - b) &= \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg}(90^\circ - c),\\ \cos(90^\circ - c) &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}(90^\circ - b),\\ \cos B &= \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}(90^\circ - c),\\ \cos C &= \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}(90^\circ - b), \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

т. е. *косинус среднего элемента прямоугольного сферического треугольника равен произведению котангенсов двух крайних его элементов, если все эти три элемента лежат рядом.*

Иногда это правило называется просто «правилом Непера» или «правилом Модюи».

Короче эти правила, называемые *правилами Непера — Модюи* (не путать с аналогиями Непера!), можно сформулировать следующим образом: *косинус каждого элемента прямоугольного сферического треугольника равен произведению котангенсов смежных с ним элементов или произведению синусов дальних элементов.*

Первое из уравнений (64) дает связь между гипотенузой и катетами прямоугольного сферического треугольника

$$\cos a = \cos b \cos c \quad (66)$$

и называется *сферической формулой Пифагора.*

Между некоторыми формулами плоского и сферического прямоугольного треугольников существует большое сходство, которым можно пользоваться для их запоминания:

Прямоугольные треугольники:

а) плоские	б) сферические
$\sin B = \frac{b}{a}$,	$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$,
$\cos B = \frac{c}{a}$,	$\cos B = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}$,
$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$,	$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$.

(67)

Сферический треугольник, в котором одна из его сторон равна 90°, называется *прямосторонним*. Все зависимости между сторонами и углами прямостороннего сферического треугольника выводятся или с помощью

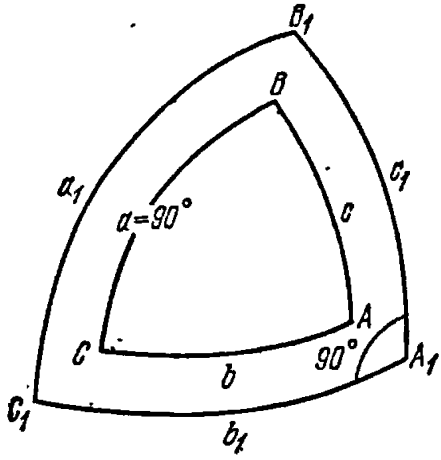

Рис. 27.

полярного ему прямоугольного сферического треугольника или же из основных формул (18)—(20), если принять в них одну из сторон равной 90°.

Ограничимся в качестве примера выводом одной формулы для решения прямостороннего сферического треугольника каждым из этих методов. Пусть нам дан сферический треугольник ABC, одна из сторон которого, например, $a = 90°$. Построим полярный данному сферический треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 27).

По свойству взаимно полярных сферических треугольников (§ 5) имеем: $a + A_1 = 180°$. Но так как

$a = 90°$, то и $A_1 = 90°$ и, следовательно, сферический треугольник $A_1B_1C_1$ является прямоугольным.

Далее, по правилу Непера — Модюи напишем: $\cos a_1 = \operatorname{ctg} B_1 \operatorname{ctg} C_1$, но так как $a_1 = 180° - A$, $B_1 = 180° - b$ и $C_1 = 180° - c$, то предыдущее соотношение принимает вид

$$\cos(180° - A) = \operatorname{ctg}(180° - b)\operatorname{ctg}(180° - c)$$

или

$$\cos A = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c.$$

То же самое получим, если положим в формуле (18) $a = 90°$:

$$\sin b \sin c \cos A = -\cos b \cos c$$

или

$$\cos A = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c.$$

Применяя аналогичные методы, можно получить десять формул, устанавливающих зависимости между элементами прямостороннего сферического треугольника:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C, \\ \sin B &= \sin A \sin b, \\ \sin C &= \sin A \sin c, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} B &= -\operatorname{tg} A \cos c, \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} b \sin C, \\ \operatorname{tg} C &= -\operatorname{tg} A \cos b, \quad \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} c \sin B, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c, \\ \cos b &= \cos B \sin c, \\ \cos c &= \cos C \sin b. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

§ 14. Площадь сферического треугольника

Предварительно выведем формулу площади сферического двуугольника $CADB$ (рис. 28). Непосредственно из рис. 28 видно, что его площадь пропорциональна дуге окружности AB большого круга сферы и определяется из пропорции

$$\frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{\smile AB^\circ}{360^\circ},$$

где Q — площадь сферического двуугольника $CADB$.

Отсюда $Q = \pi R^2 \frac{AB^\circ}{90^\circ}$, или

$$Q = \pi R^2 \frac{C}{90^\circ}, \qquad (71)$$

где C — сферический угол при вершине C двуугольника, измеряемый дугой AB.

Для определения площади S сферического треугольника ABC (рис. 29) дополним его стороны AB, BC и AC до полных окружностей, соответственно, ABA_1B_1, BCB_1C_1 и ACA_1C_1. Тогда

$$BC + CB_1 = 180^\circ, \quad AC + AC_1 = 180^\circ,$$
$$BC + BC_1 = 180^\circ, \quad AC + CA_1 = 180^\circ,$$

откуда следует: $CB_1 = BC_1$ и $AC_1 = CA_1$.

Выберем на сфере три двуугольника: ABA_1C, BAB_1C и двуугольник, состоящий из треугольников ABC и ABC_1, ограниченный дугами окружностей большого

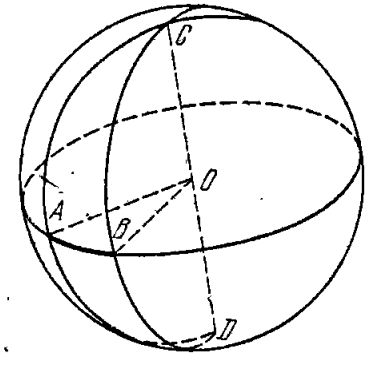

Рис. 28.

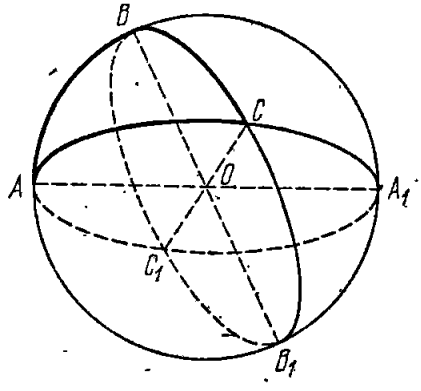

Рис. 29.

круга AA_1 и BB_1, равными по 180° каждая, пересекающимися под углом C. Определим площади Q_1, Q_2 и Q_3 этих двуугольников:

$$Q_1 = \Delta ABC + \Delta A_1BC = \pi R^2 \frac{A}{90^\circ},$$

$$Q_2 = \Delta ABC + \Delta AB_1C = \pi R^2 \frac{B}{90^\circ},$$

$$Q_3 = \Delta ABC + \Delta ABC_1 = \pi R^2 \frac{C}{90^\circ}.$$

Теперь найдем общую площадь всех трех двуугольников:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 2\Delta ABC + \Delta ABC + \Delta A_1BC + \\ + \Delta AB_1C + \Delta ABC_1 = \pi R^2 \frac{A+B+C}{90^\circ}.$$

Из рис. 29 видно, что $\smile AC_1 = \smile A_1C$, $\smile BC_1 = \smile B_1C$ и $\angle ACB = \angle AC_1B = \angle A_1CB_1$ равны между собой. Поэтому согласно § 7 сферические треугольники ABC_1 и A_1B_1C равны. Легко видеть (см. рис. 29), что суммарная площадь сферических треугольников ABC, A_1BC, AB_1C и ABC_1 равна площади полусферы и поэтому

$$2\Delta ABC = \frac{\pi R^2}{90^\circ}(A+B+C) - 2\pi R^2$$

или

$$2\Delta ABC = \frac{\pi R^2}{90^\circ}(A+B+C-180^\circ).$$

Но из § 4 известно, что величина в скобках — это эксцесс сферического треугольника ε, поэтому окончательно получаем

$$\Delta ABC = \frac{\pi R^2}{180^\circ}\varepsilon. \qquad (72)$$

Следовательно, площадь сферического треугольника пропорциональна его эксцессу. Таким образом, для вычисления площади сферического треугольника надо (кроме радиуса R сферы) знать его эксцесс.

Из формулы (72) очевидно также, что площади сферических треугольников, расположенных на одной и той же сфере, относятся как их эксцессы. Иногда у малых треугольников эксцесс удобнее выражать не в градусах, а в секундах, т. е. 180° следует заменить на $180 \cdot 60 \cdot 60''$. Тогда формулу (72) можно переписать в виде

$$\Delta ABC = \frac{\pi\varepsilon'' R^2}{180 \cdot 60 \cdot 60''} = \varepsilon'' R^2 \sin 1''.$$

Здесь площадь сферического треугольника выражена в квадратных единицах, принятых для R. Но при $R=1$ выражение $\frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}$ представляет собой длину дуги в $1''$. В этом случае формула (72) упрощается:

$$\Delta ABC = \varepsilon'' \sin 1'' \qquad (72')$$

и площадь сферического треугольника выражается в отвлеченных квадратных единицах или в радианной мере. Если радиус выражен в градусах ($R=57°,2957...$), то площадь сферического треугольника будет выражена в квадратных градусах.

Выведем две формулы, определяющие эксцесс сферического треугольника в зависимости: 1) от трех его сторон и 2) от двух сторон и угла, между ними заключенного.

Возьмем первую формулу Деламбра (53):

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

и, заменив в ней $\cos\frac{C}{2}$ на $\sin\frac{180°-C}{2}$, составим производную пропорцию

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}-\sin\frac{180°-C}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{180°-C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}}.$$

Далее, используя формулу сумм и разностей тригонометрических функций, будем иметь

$$\frac{2\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180°)\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180°)}{2\sin\frac{1}{4}(A+B-C+180°)\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180°)}=$$

$$=-\frac{2\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a-b-c)}{2\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(a-b-c)}.$$

Теперь, упростив полученное соотношение, найдем

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{4}(A+B-C+180°)\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon=$$

$$=-\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a-b+c)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a-b-c). \quad (73)$$

Но так как $(A+B-C+180°)=A+B+C-180°-2C+360°=\varepsilon-2C+360°$, $a-b+c=$

$= 2(p-b)$ и $a-b-c = -2(p-a)$, где p — полупериметр сферического треугольника, то равенство (73) принимает вид

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}(2C-\varepsilon)\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a). \qquad (74)$$

Выполнив аналогичные преобразования третьей формулы Деламбра (55), получим соотношение

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{4}(2C-\varepsilon)\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon = \operatorname{tg}\frac{1}{2}p\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c). \qquad (75)$$

Наконец, перемножив почленно два последние равенства (74) и (75), находим окончательно

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{4}\varepsilon = \operatorname{tg}\frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c). \qquad (76)$$

Соотношение (76), выражающее эксцесс сферического треугольника через его стороны a, b и c, называется *формулой Люилье*.

Для вывода формулы эксцесса сферического треугольника в зависимости от двух сторон и угла, между ними заключенного, напишем формулы (46) и (51) тангенсов половинных сторон a и b сферического треугольника:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}.$$

Перемножив два последних выражения почленно, получим

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin C\cos\frac{\varepsilon}{2}-\cos C\sin\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sin C\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}-\cos C}.$$

Отсюда имеем

$$\sin C \operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} - \cos C = \operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2},$$

после чего находим конечную формулу

$$\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2} + \cos C}{\sin C}. \qquad (77)$$

Чтобы сделать формулу (77) удобной для логарифмирования, вводят вспомогательный угол φ, полагая

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2} = \sin C \operatorname{ctg}\varphi,$$

после чего ее правая часть приводится к одночленной форме:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin(C+\varphi)}{\sin\varphi \sin C}. \qquad (78)$$

Наконец приведем еще простой вывод эксцесса ε сферического треугольника в функции его трех сторон a, b, c и угла C, лежащего против одной из них.

Возьмем две формулы, (45) и (47), для синусов половинных сторон $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ сферического треугольника

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C}}$$

и

$$\sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin C}}$$

и перемножим их почленно:

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} = \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin C}\cdot\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin B}}.$$

Но так как согласно формуле (50)

$$\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin B}} = \cos\frac{c}{2},$$

то предыдущее соотношение приводится к виду

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin C}\cos\frac{c}{2},$$

откуда и приходим к рабочей формуле

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin C, \tag{79}$$

называемой первой *формулой Каньоли*.

§ 15. Узкие и малые сферические треугольники

Сферический треугольник называется *узким*, если одна из его сторон мала сравнительно с двумя другими сторонами (рис. 30). В этом случае (§ 6) против малой стороны c в сферическом треугольнике ABC будет лежать также малый угол C. Узкие сферические треугольники нельзя решать как плоские треугольники, но к решению их применяются упрощенные формулы.

Опустив из вершины угла B, прилегающего к малой стороне c, сферический перпендикуляр c_1 на противолежащую этому углу сторону b, разделим сферический треугольник ABC на два прямоугольных сферических треугольника ABD и BCD.

Треугольник ABD со сторонами c_1, b_1, c решается как плоский прямоугольный треугольник, по формулам

$$b_1=c\cos A;\ c_1=c\sin A;$$
$$\angle ABD=90^\circ-A.$$

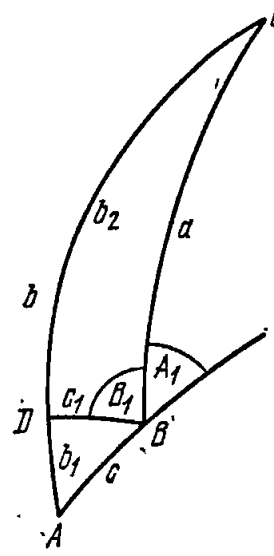

Рис. 30.

Прямоугольный сферический треугольник BCD решается по упрощенным формулам сферической тригонометрии, выводимым в дальнейшем.

Напишем, применительно к нашему случаю, последнюю из формул (63):

$$\operatorname{tg} b_2=\operatorname{tg} a\cos C.$$

Вычитая из обеих ее частей, а затем прибавляя к ним величину $\operatorname{tg} a$, получим

$$\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} a(\cos C - 1),$$
$$\operatorname{tg} b_2 + \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} a(\cos C + 1).$$

Разделив почленно первое из этих двух соотношений на второе, получим выражение

$$\frac{\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b_2 + \operatorname{tg} a} = \frac{\cos C - 1}{\cos C + 1},$$

которое можно представить в виде

$$\frac{\sin(b_2 - a)}{\sin(b_2 + a)} = \frac{-\sin^2 \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{C}{2}} = -\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}.$$

Но, поскольку угол C мал, $\cos C$ близок к единице и катет b_2 мало отличается от гипотенузы a, величины $\sin(b_2 - a)$ и $\sin(b_2 + a)$ можно заменить соответственно величинами $b_2 - a$ и $\sin 2a$, после чего предыдущее равенство примет вид

$$b_2 - a = -\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \sin 2a,$$

или, иначе,

$$(b_2 - a)'' = -\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \sin 2a}{\sin 1''}.$$

Представляя для малого угла C величину $\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}$ как $\frac{C^2}{4} \sin^2 1''$, окончательно находим

$$(a - b_2)'' = \frac{C^2}{4} \sin 1'' \sin 2a. \qquad (80)$$

Отсюда заключаем, что с точностью до членов первого порядка малости гипотенуза a узкого прямоугольного сферического треугольника BCD равна его катету b_2.

Для того же треугольника BCD на основании формулы синусов (25) можем написать

$$\sin c_1 = \sin a \sin C,$$

Но ввиду малости величин c_1 и C можно заменить $\sin c_1$ через c_1, а $\sin C$ через C и тогда получим

$$c_1 = C \sin a \qquad (81)$$

или, заменяя гипотенузу a катетом b_2, найдем

$$c_1 = C \sin b_2.$$

Для вывода приближенной формулы эксцесса сферического треугольника ABC обозначим его внешний угол через A_1 и тогда $A_1 = 180° - B$. Но так как $\varepsilon = A + B + C - 180°$, то эксцесс можно выразить соотношением

$$\varepsilon = C + A + 180° - A_1 - 180° = C - (A_1 - A).$$

Но $A_1 - A = 180° - B - A = 180° - (B_1 + 90° - A) = A = 90° - B_1$; отсюда

$$\varepsilon = C - (90° - B_1).$$

В последнем равенстве угол B_1 принадлежит прямоугольному сферическому треугольнику BCD и для него по правилу Непера — Модюи можно написать

$$\cos B_1 = \cos b_2 \sin C$$

или, иначе,

$$\sin (90° - B_1) = \cos b_2 \sin C.$$

Но так как B_1 мало отличается от 90°, то синусы малых углов $90° - B_1$ и C можно заменить самими углами и тогда

$$90° - B_1 = C \cos b_2.$$

Отсюда

$$\varepsilon = C - C \cos b_2 = C (1 - \cos b_2) = C (1 - \cos a) =$$

$$= 2C \sin^2 \frac{a}{2},$$

т. е.

$$\varepsilon = 2C \sin^2 \frac{a}{2}. \qquad (82)$$

Приближенная формула (82), выражающая эксцесс узкого сферического треугольника ABC, является точной формулой для вычисления эксцесса прямоугольного сферического треугольника BCD. Пренебрегая при вы-

воде формулы (82) величинами второго порядка малости, мы пренебрегаем эксцессом элементарного прямоугольного сферического треугольника ABD.

Сферический треугольник считается *малым*, если стороны его весьма малы сравнительно с радиусом сферы, на которой он расположен.

В математическом анализе для тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ выводятся следующие бесконечные ряды:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \tag{83}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \tag{84}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots \tag{85}$$

Если требуемая точность вычислений такова, что величиной x^3, как величиной третьего порядка малости, можно пренебречь, то сферический треугольник можно рассматривать как плоский, а тригонометрические функции малых сторон примут вид

$$\sin x = x, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x = x.$$

Тогда имеют место соотношения

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \tag{86}$$

как в плоском треугольнике, при этом формула $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ обращается в

$$1 - \frac{a^2}{2} = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc\cos A =$$

$$= 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4} + bc\cos A.$$

Если пренебречь членом $\frac{b^2c^2}{4}$ как величиной четвертого порядка малости, то получим

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \tag{87}$$

как в плоском треугольнике.

Точно так же формула $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$ обращается в

$$a \cos B = c - b \cos A, \qquad (88)$$

как в плоском треугольнике. Величина допускаемой при этом ошибки зависит от задаваемой точности, которую можно определить из табл. 4.

Таблица 4

$x-\sin x$	при $x=$	$\operatorname{tg} x - x$	при $x=$	$1-\cos x$	при $x=$
0°,1	12°33′	0°,1	9°57′	0,1	25°51′
1′	6 54	1′	5 29′	0,01	8 07
1″	1 46	1″	1 24	0,001	2 34
0″,1	0,49	0″,1	0 39	0,0001	0 49
0″,01	0 23	0,01	0 18	0,00001	0 15
0″,001	0 11	0,001	0 8,5	0,000001	0 5

Для малых треугольников имеет место *теорема Лежандра*, дающая несколько более точное решение, которую приводим без доказательств (рис. 31):

Малый сферический треугольник можно приближенно вычислять как плоский, имеющий те же по

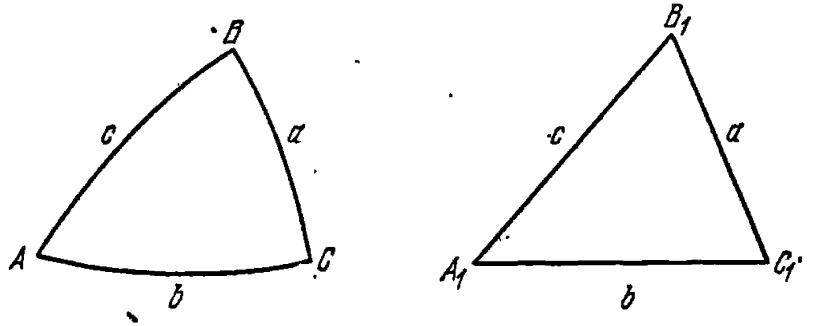

Рис. 31.

величине стороны, а каждый из его углов на треть эксцесса ε **) меньше, чем соответственный угол сферического треугольника.*

*) Доказательство теоремы см. в книге Н. Н. Степанова «Сферическая тригонометрия», Гостехиздат, 1948.

Иными словами, если имеются малый сферический треугольник с углами A, B и C и сторонами a, b и c и плоский треугольник со сторонами a, b, c, а радиус сферы равен единице, то углы плоского треугольника A_1, B_1 и C_1 определятся из соотношений

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon}{3},\ B_1 = B - \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } C_1 = C - \frac{\varepsilon}{3}, \quad (89)$$

или

$$A - A_1 = \frac{\varepsilon}{3},\ B - B_1 = \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } C - C_1 = \frac{\varepsilon}{3}.$$

При этом, поскольку $A + B + C = 180° + \varepsilon$, а сумма углов плоского треугольника $A_1 + B_1 + C_1 = 180°$,

$$(A + B + C) - (A_1 + B_1 + C_1) = \varepsilon.$$

Если радиус сферы равен R, то, поскольку эксцесс связан с площадью сферического треугольника S формулой $\varepsilon'' = \frac{S}{R^2 \sin 1''}$, имеем $A + B + C - A_1 - B_1 - C_1 = \frac{S}{R^2 \sin 1''}$, а также

$$A - A_1 = \frac{S}{3R^2 \sin 1''},\ B - B_1 = \frac{S}{3R^2 \sin 1''},$$

$$C - C_1 = \frac{S}{3R^2 \sin 1''}. \quad (90)$$

Вычисление по теореме Лежандра сферических треугольников со сторонами до 200 *км*, лежащих на земной поверхности, приводит к ошибке в углах, не превышающей 0″,01.

В геодезии при вычислении треугольников, отнесенных к поверхности сфероида вращения, можно малую часть его поверхности принять за часть поверхности сферы, описанной радиусом, найденным по формуле Грунерта,

$$R_{ср} = \sqrt{MN}, \quad (91)$$

в которой $R_{ср}$ есть среднее геометрическое из радиусов кривизны сечений сфероида M по меридиану и N по первому вертикалу, сделанных в средней точке сфероидического треугольника. Эти радиусы кривизны вычисляются по формулам: для сечения по меридиану

$M = \dfrac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$, для сечения по первому вертикалу $N = \dfrac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$, где a — большая полуось сфероида вращения, e — эксцентриситет его меридианного сечения, а φ — широта средней точки сфероидического треугольника.

В картографии Землю вместо сфероида вращения с полуосями a и b часто принимают за сферу радиуса $R_0 = \sqrt{MN}$.

§ 16. Дифференциальные формулы сферической тригонометрии

При решении сферических треугольников по данным, полученным в результате измерений, бывает необходимо рассматривать зависимость между малыми измерениями величин различных элементов сферических треугольников, например, учитывать влияние ошибок измерений на значение искомых величин. Пусть величины b, A и B известны точно. Сторону a можно получить по формуле (25), записанной в виде

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A. \qquad (25а)$$

Предположим теперь, что величины b, A и B требуют поправок Δb, ΔA и ΔB. Если производить вычисления, используя значения $b + \Delta b$, $A + \Delta A$, $B + \Delta B$, то получим не искомую величину a, а некоторое новое значение $a + \Delta a$, определяемое из уравнения

$$\sin(a + \Delta a)\sin(B + \Delta B) = \sin(b + \Delta b)\sin(A + \Delta A). \qquad (25б)$$

Нам требуется знать, как величина Δa связана с поправками Δb, ΔA, ΔB. Эту связь мы получим, если вычтем уравнение (25а) из (25б). Но такое вычитание, если пренебречь квадратами и произведениями малых величин Δa, Δb, ΔA и ΔB, равносильно дифференцированию уравнения (25а) и замене дифференциалов малыми конечными приращениями. Для этого выводятся дифференциальные уравнения сферической тригонометрии.

Чтобы оценить влияние малых изменений того или другого элемента, нужно определить коэффициент перед этим малым изменением. Для уменьшения влияния этого изменения необходимо условия задачи выбрать так (если это возможно), чтобы коэффициент перед этим малым изменением имел наименьшее значение.

I. *Зависимости между малыми изменениями одного угла и трех сторон сферического треугольника*

Напишем формулу (18) косинуса стороны сферического треугольника, выражающую зависимость между четырьмя его элементами,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

и продифференцируем ее, считая, что все элементы сферического треугольника изменяются независимо друг от друга:

$$\sin a\, da = (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A)\, db +$$
$$+ (\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A)\, dc + \sin b \sin c \sin A\, dA.$$

Но по формулам (27) и (28) пяти элементов имеем

$$\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A = \sin a \cos C,$$
$$\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A = \sin a \cos B,$$

поэтому, сделав замену величин, стоящих в круглых скобках предыдущего равенства, получим

$$\sin a\, da = \sin a \cos C\, db + \sin a \cos B\, dc +$$
$$+ \sin b \sin c \sin A\, dA.$$

Разделим обе части полученного соотношения на $\sin a$:

$$da = \cos C\, db + \cos B\, dc + \frac{\sin b \sin c \sin A}{\sin a}\, dA.$$

Наконец, заменив по формуле (25) синусов отношение $\frac{\sin A}{\sin a}$ в третьем слагаемом последнего равенства на

$\frac{\sin B}{\sin b}$, находим окончательную формулу (и аналогично две другие формулы)

$$\left.\begin{aligned} da &= \cos C\ db + \cos B\ dc + \sin c \sin B\ dA, \\ db &= \cos A\ dc + \cos C\ da + \sin a \sin C\ dB, \\ dc &= \cos B\ da + \cos A\ db + \sin b \sin A\ dC. \end{aligned}\right\} \quad (92)$$

II. *Зависимости между малыми изменениями одной стороны и трех углов сферического треугольника*

По свойствам полярного треугольника [формула (14)] можно написать

$$a = 180° - A_1, \quad b = 180° - B_1, \quad c = 180° - C_1,$$

откуда

$$da = -dA_1, \quad db = -dB_1, \quad dc = -dC_1. \quad (93)$$

Заменяя написанные значения дифференциалов конечными приращениями и учитывая, что мы не накладывали никаких ограничений на полярный треугольник, который поэтому можно рассматривать как произвольный, отбросим индексы при углах, подставим их выражения в формулы (93) и найдем искомые зависимости:

$$\left.\begin{aligned} dA &= -\cos c\ dB - \cos b\ dC + \sin C \sin b\ da, \\ dB &= -\cos a\ dC - \cos c\ dA + \sin A \sin c\ db, \\ dC &= -\cos b\ dA - \cos a\ dB + \sin B \sin a\ dc. \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

III. *Зависимости между малыми изменениями угла и противолежащей ему стороны сферического треугольника*

Чтобы определить зависимость между малыми изменениями угла A и противолежащей ему стороны a сферического треугольника, напишем формулу (25) синусов в виде произведения:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a$$

и продифференцируем ее обе части, считая величины A и a переменными:

$$dA \cos A \sin b = da \sin B \cos a.$$

Разделив полученное соотношение на предыдущее, найдем

$$\operatorname{ctg} A\, dA = \operatorname{ctg} a\, da. \tag{95}$$

Аналогично выводятся формулы и для других углов и сторон:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} B\, dB &= \operatorname{ctg} b\, db, \\ \operatorname{ctg} C\, dC &= \operatorname{ctg} c\, dc. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

IV. *Зависимости между малыми изменениями двух сторон и противолежащих им двух углов сферического треугольника*

Для получения зависимости между малыми изменениями четырех элементов a, b и A, B сферического треугольника, продифференцируем ту же формулу (25) синусов

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$

считая все четыре элемента a, b, A, B переменными величинами:

$$\cos A \sin b\, dA + \cos b \sin A\, db = \\ = \cos B \sin a\, dB + \cos a \sin B\, da.$$

Аналогичным образом получаются формулы для сочетаний элементов a, c и A, C, а также b, c и B, C.

V. *Зависимости между малыми изменениями одной из сторон и трех углов сферического треугольника*

Наконец в астрономии имеет место случай, когда две стороны сферического треугольника сохраняются неизменными, тогда как все прочие его элементы изменяются. Считая, например, стороны a и b постоянными величинами, можно из системы формул (92) найти искомые зависимости в качестве их частных случаев:

$$\left.\begin{aligned} dc &= -\sin c \operatorname{tg} B\, dA, \\ dc &= -\frac{\sin a \sin C}{\cos A}\, dB, \\ dc &= \sin b \sin A\, dC. \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

ГЛАВА IV

РЕШЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 17. Общие замечания о решении сферического треугольника

Решить сферический треугольник это значит найти все его элементы по заданным. Кроме того, иногда требуется найти некоторые дополнительные элементы, например, площадь сферического треугольника, сферический избыток и т. п.

Каждый сферический треугольник содержит шесть элементов; чтобы решить треугольник, нужно знать три из них. Общее число различных вариантов может быть найдено как число возможных сочетаний из шести элементов по три:

$$C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20.$$

Эти сочетания имеют вид: abc, abA, abB, abC, acA, acB, acC, bcA, bcB, bcC, ABC, ABa, ABb, ABc, ACa, ACb, ACc, BCa, BCb, BCc. Из этого перечисления видно, что многие из этих двадцати сочетаний имеют одинаковый геометрический смысл. Например, сочетания abC, bcA, caB есть сочетания двух сторон и угла между ними. Понятно, что решение треугольников во всех этих случаях выполняется аналогично, а формулы получаются круговой перестановкой. Поэтому эти двадцать сочетаний сводятся к шести основным вариантам решения сферического треугольника:

1) по трем сторонам a, b, c;
2) по трем углам A, B, C;

3) по двум сторонам и углу между ними a, b, C;

4) по двум углам и стороне между ними a, B, C;

5) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них a, b, A;

6) по двум углам и стороне, противолежащей одному из них a, A, B.

Варианты 5 и 6, строго говоря, представляют собой по два варианта каждый, поскольку противолежащий элемент может быть выбран двояко, однако это не влияет на ход решения.

Прежде чем приступить к решению сферического треугольника, нужно проверить, соответствуют ли заданные элементы условиям существования такого треугольника. Эти условия были выведены в параграфах 4, 5 и 6. Кратко они могут быть выражены следующим образом:

1) Сумма двух сторон сферического треугольника должна быть больше третьей, т. е. $a+b>c$, $b+c>a$ и $c+a>b$.

2) Сумма трех сторон сферического треугольника должна быть больше нуля и меньше 360 градусов, т. е. $0<a+b+c<360°$.

3) Сумма трех углов сферического треугольника должна быть больше 180 и меньше 540 градусов, т. е. $180°<A+B+C<540°$.

4) Сумма двух углов без третьего должна быть меньше 180°, т. е. $A+B-C<180°$, $B+C-A<180°$ и $C+A-B<180°$.

5) Если сумма двух углов сферического треугольника больше, равна или меньше 180°, то и сумма двух противоположных им сторон соответственно больше, равна или меньше 180°, т. е.

если $A+B>180°$, то и $a+b>180°$,

если $A+B=180°$, то и $a+b=180°$,

если $A+B<180°$, то и $a+b<180°$.

6) Если разность двух сторон сферического треугольника больше, равна или меньше нуля, то и разность противолежащих им углов соответственно больше, равна или меньше нуля, т. е.

если $a-b>0$, то и $A-B>0$,

если $a-b=0$, то и $A-B=0$,

если $a-b<0$, то и $A-B<0$.

Кроме того, при решении следует помнить, что в сферическом треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона.

При решении прямоугольного сферического треугольника должны удовлетворяться еще два дополнительных условия, выведенные в параграфе 13:

7) Число сторон, бóльших 90°, должно быть четное, а меньших 90° — нечетное.

8) Катет и противолежащий ему угол, всегда лежат в одной четверти круга.

По мере вычисления искомых величин необходимо проверять, удовлетворяют ли найденные величины вместе с данными всем указанным выше условиям существования сферического треугольника. Результаты решения, не удовлетворяющие этим условиям, должны быть отброшены. Может оказаться, что все решения непригодны и при данных значениях элементов существование сферического треугольника невозможно. Например, при решении сферического треугольника по двум сторонам $a = 49°$, $b = 31°$ и углу $A = 151°$ для угла B находятся два значения: $B_1 = 39°23'$ и $B_2 = 140°47'$. Оба они непригодны, так как сумма сторон $a + b = 130° < 180°$, тогда как сумма противолежащих им углов в обоих случаях будет $A + B_1 = 190°23' > 180°$ и $A + B_2 = 291°47' > 180°$, что нарушает условие 5 существования сферического треугольника.

Искомый элемент может определяться через различные тригонометрические функции. Если неизвестный элемент определяется по тангенсу и котангенсу, то, с учетом ограничений Эйлера, решение всегда возможно, поскольку обе эти функции могут принимать все числовые значения в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. При этом решение будет единственным, так как при положительных значениях тангенса и котангенса (в первой четверти) искомый элемент будет меньше 90°, а при отрицательных значениях (во второй четверти) — больше 90°.

Когда искомый элемент вычисляется по синусу, то решение возможно лишь в том случае, если синус больше нуля, но не превышает единицы. Если это имеет место, то находятся два результата, поскольку положительному значению синуса удовлетворяют два угла:

один меньший 90° и другой, служащий дополнением первого до 180°.

Когда искомый элемент вычисляется по косинусу, то решение возможно, если его величина заключается в пределах от +1 до —1. При возможности решения оно будет единственным, так как положительному и отрицательному значениям косинуса соответствует по одному углу, лежащему в первой и второй четвертях круга.

Следующим этапом является выбор формул для решения данного сферического треугольника. Этот выбор осуществляется как с учетом сказанного выше, так и с учетом некоторых правил, изложенных в следующем параграфе.

Перед выбором формул бывает полезно провести приближенное оценочное решение сферического треугольника с точностью до 1°—2°. Такое решение можно осуществить по любым формулам с точностью до 3—4 знаков, например, с помощью логарифмической линейки или стереографической сетки, описанной в § 19. Приближенное решение помогает выявить характер определяемых элементов и облегчает выбор формул для точного вычисления. Особенно полезно бывает провести приближенное вычисление при массовом вычислении близких между собой сферических треугольников.

Иногда бывает выгодно преобразовать формулу. Если, например, по данным элементам a, b, C надо определить c, то при условии, что сторона c не близка к 0 или 180°, можно применить формулу косинуса стороны:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

При малых значениях c эту формулу можно преобразовать:

$$1 - \cos c = 2 \sin^2 \frac{c}{2} =$$

$$= 1 - \cos a \cos b - \sin a \sin b \left(1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}\right) =$$

$$= 1 - \cos (a - b) + 2 \sin a \sin b \sin^2 \frac{C}{2} =$$

$$= 2 \sin^2 \frac{a - b}{2} + 2 \sin a \sin b \sin^2 \frac{C}{2},$$

или, окончательно,

$$\sin^2\frac{c}{2} = \sin^2\frac{a-b}{2} + \sin a \sin b \sin^2\frac{C}{2}. \qquad (98)$$

Но последняя формула (99) невыгодна, если c близко к 180°. В таком случае надо вычесть обе части полученного равенства (99) из единицы:

$$\cos^2\frac{c}{2} = \cos^2\frac{a-b}{2} - \sin a \sin b \sin^2\frac{C}{2}. \qquad (99)$$

Особенно часто приходилось совершать подобные преобразования при вычислениях с логарифмами, когда применение формул, содержащих суммы или разности, представляло значительные трудности. Поскольку в наше время все вычисления выполняются на электронных счетных машинах или арифмометрах, к преобразованиям формул прибегают реже. Однако метод преобразования основных формул сферической тригонометрии остается в арсенале вычислителей и сейчас.

Для выполнения самих вычислений составляется схема вычислений, т. е. удобное размещение чисел, которые в ходе вычислений должны участвовать в операциях сложения, вычитания, а главное, умножения и деления. Поскольку все вычислительные машины и арифмометры имеют счетчик памяти, в который может быть помещен промежуточный результат, некоторые промежуточные величины можно не вносить в схему. Это, в частности, относится к таким операциям, как тройное умножение и делепие, т. е. операциям типа $x = a \cdot b \cdot c$ или $x = \frac{a \cdot b}{c}$, когда нет необходимости записывать произведение $a \cdot b$. Наоборот, если в формуле участвует операция сложения или вычитания, такое промежуточное произведение бывает целесообразнее записать. Впрочем, это чаще всего зависит от конкретных свойств используемой вычислительной машины, а также от того, что́ требуется вычислить.

Если в ходе вычислений определяемый элемент получается не однозначно, то бывает необходимо провести анализ полученных величин: нужно определить, какое решение (или несколько решений) удовлетворяет условиям существования сферического треугольника.

Заключительным этапом решения является контроль вычислений. Его полезнее всего делать вычисле-

нием по формулам, которые не участвовали в получении неизвестных величин. Особенно полезен контроль по таким формулам, в которые входят как полученные в ходе вычислений величины, так и хотя бы некоторые исходные, данные величины. Другим надежным способом контроля является вычисление одной и той же неизвестной величины по двум разным формулам; этот способ контроля применяется чаще всего при решении по аналогиям Непера.

Подобные методы контроля лучше убеждают в отсутствии ошибок, чем повторение вычислений во второй раз (во вторую руку). Однако расхождение результатов контрольных вычислений на одну-две единицы последнего десятичного знака, до которого ведутся вычисления, допустимо, так как оно может набежать в процессе вычислений.

Таким образом, решение сферических треугольников включает следующую последовательность операций:

1. Оценка исходных данных.
2. Предварительное приближенное решение и оценка искомых величин.
3. Выбор формул.
4. Составление схемы и вычисления.
5. Анализ полученных результатов.
6. Контрольные вычисления.

В §§ 20—22 приводится ряд примеров решения сферических треугольников и задач по сферической тригонометрии. Некоторые из них заимствованы из книги М. К. Вентцеля «Сферическая тригонометрия».

§ 18. Элементы вычислительной техники

Существуют определенные правила производства вычислений, соблюдение которых обеспечивает бо́льшую точность получаемых результатов. Как указывает известный советский астрометрист, профессор С. Н. Блажко, «Формулы сферической тригонометрии служат в сферической астрономии для того, чтобы по ним вычислять искомые величины по данным. Для безошибочного и быстрого вычисления требуются специальные способности, которые не у всех есть, но помимо их при вычислениях требуется соблюдение неко-

торых правил, обязательных для каждого вычислителя: умелое вычисление прежде всего и отличается от неумелого строгим соблюдением этих правил»*).

Не претендуя на полноту изложения, ниже мы укажем некоторые из таких правил.

При обработке астрономических и геодезических наблюдений принято выполнять вычисления с точностью, на порядок большей, чем точность наблюдений, т. е., если наблюдения сделаны с точностью $\pm 10''$, $\pm 1''$, $\pm 0''$,1, то соответствующие вычисления нужно проводить с точностью в десять раз большей (или, что то же, с ошибкой в десять раз меньшей), т. е., соответственно, $\pm 1''$, $\pm 0''$,1 и $\pm 0''$,01 и соответственно этому использовать табличный материал.

Но не нужно завышать точность, еще более увеличивая число значащих цифр, например, используя два или три знака сверх заданных наблюдениями. Точность это не повысит, а только увеличит затраты труда и времени вычислителя. И никогда не следует вычислять угловые величины точнее, чем $0''$,0001. В естествознании такая точность еще не достигнута.

Когда в ходе вычислений или при пользовании таблицами приходится отбрасывать лишние десятичные знаки и производить округление, необходимо соблюдать следующее правило:

Если отбрасываемая часть меньше половины единицы последнего сохраняемого знака, то последняя сохраняемая цифра остается без изменений.

Если отбрасываемая часть больше половины единицы сохраняемого знака, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Если отбрасываемая часть точно равна половине единицы сохраняемого знака, то последняя сохраняемая цифра остается без изменений, если она четная или нуль, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Например, отбрасывая две последние цифры в пятизначных числах и округляя их до трех знаков, будем иметь:

0,23449 . . .	0,234,	0,32950 . . .	0,330,
0,44451 . . .	0,445,	0,56450 . . .	0,564.

*) Блажко С. Н., Курс сферической астрономии, Гостехиздат, 1954, стр. 29.

При решении сферических треугольников приходится вычислять дуги и углы по их тригонометрическим функциям: синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу и т. п. Изменения этих функций при равном изменении аргумента для различной величины углов не одинаковы. Поэтому предпочтительнее находить искомые углы и дуги по их тангенсам, что можно делать всегда, по синусу, если угол близок к 0 или 180°, и по косинусу, если угол близок к 90°. Часто, хотя и не всегда, это бывает возможным. Во всяком случае, следует помнить, что определение элементов, бо́льших 70°, по синусу, и элементов, меньших 20°, по косинусу, может привести к потере точности, что нежелательно.

Наоборот, выгодно применять формулы, в которых данные стороны или углы входят под знаками таких функций, которые мало меняются при изменении аргумента, например, дуга или углы, близкие к 0 или 180°— под знаком косинуса, а близкие к 90°— под знаком синуса. При этом возможные ошибки в данных величинах, которые чаще всего бывают получены из наблюдений и отягощены ошибками наблюдений, будут меньше влиять на эти тригонометрические функции. Такие формулы не во всякой задаче можно составить. Во всяком случае, при точных вычислениях не нужно вслепую брать первую попавшуюся формулу, а надо стремиться выбрать ту систему формул, которая для данной задачи выгоднее других.

§ 19. Приближенные решения сферического треугольника

Во многих случаях, особенно при массовом решении сферических треугольников, бывает удобно использовать стереографическую сетку.

Стереографическая сетка (см. Приложение) представляет собой стереографическую проекцию меридианов и параллелей некоторой сферы на плоскость. Центром проекции является точка экватора, равноудаленная от некоторого меридиана, принятого за основной меридиан. При этом основной меридиан проектируется на плоскость проекции как окружность, внутри которой располагаются линии, отображающие проекции параллелей и меридианов. Меридиан, проходящий че-

рез точку экватора, являющуюся центром проекции, отобразится диаметром этой окружности, точки пересечения которого с окружностью основного меридиана будут соответствовать полюсам сферы. Эти точки называются полюсами сетки, а диаметр, их соединяющий,— осью сетки. Проекция экватора сферы представляет собой также диаметр окружности основного меридиана, перпендикулярный к оси сетки; он называется экватором сетки. Проекции меридианов сферы отобразятся дугами, соединяющими полюсы сетки, а параллели дугами, перпендикулярными к оси сетки.

Стереографическая сетка обладает тем свойством, что дуга любого большого круга на сфере отобразится на ней также дугой круга. Такая сетка позволяет находить приближенные решения почти всех задач сферической тригонометрии: она часто используется при решении практических задач сферической и практической астрономии, геодезии и картографии, разумеется, в тех случаях, когда точность позволяет сделать это.

В зависимости от характера поставленной задачи основной меридиан стереографической сетки может служить отображением самых различных кругов небесной сферы. Например, он может быть отображением плоскости небесного меридиана, его полюсы — зенитом и надиром; тогда ось сетки будет соответствовать отвесной линии и проекции первого вертикала, а экватор сетки явится проекцией истинного горизонта. Если принять полюсы сетки за полюсы мира, то ось сетки будет соответствовать оси мира, а экватор сетки явится проекцией небесного экватора. Таких вариантов существует достаточно много. В нашем изложении мы будем рассматривать применение стереографической сетки к решению сферических треугольников на произвольной сфере, для которой принята некоторая система сферических координат: широта φ и долгота λ.

Рассмотрим ряд примеров применения стереографической сетки, часть которых взята из брошюры проф. Г. В. Вульфа*), по имени которого стереографическую сетку иногда называют «сеткой Вульфа».

---

*) Вульф Г. В., Способ графического решения задач по космографии и математической географии, Нижний Новгород, 1909.

Графические построения выполняются не на самой стереографической сетке, а на кальке или листе прозрачной бумаги, на которую нанесены окружность, диаметр которой равен диаметру окружности основного меридиана, центр окружности и два взаимно перпендикулярных диаметра, один из которых называется диаметром кальки и обозначается R_1R_2, другой — осью кальки, точки пересечения которой с основным меридианом $П_1$ и $П_2$ называются полюсами кальки. Для краткости такой лист называется просто «калька».

Стереографическая сетка, приведенная в Приложении, представляет собой сетку меридианов и параллелей, нанесенных через два градуса, внутри окружности основного меридиана диаметром 20 *см*. Полюса сетки обозначены буквами P_1 и P_2, а экватор сетки пересекается с основным меридианом в точках Q_1 и Q_2.

Рассмотрим решение ряда задач сферической геометрии и тригонометрии с помощью стереографической сетки.

Задача 1. Определение длины дуги l между двумя точками. Пусть даны две точки A

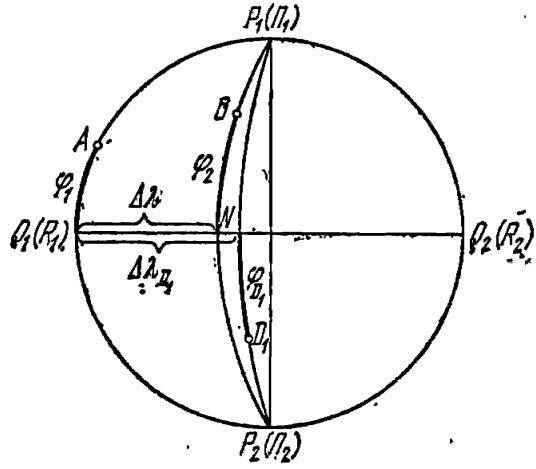

Рис. 32.

и B на сфере. Их сферические координаты φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2. Требуется найти кратчайшее угловое расстояние, т. е. длину дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки (рис. 32).

Наложим кальку на стереографическую сетку так, чтобы полюсы кальки $П_1$ и $П_2$ совпали с полюсами сет-

ки P_1 и P_2. При этом совпадут и экваторы кальки и сетки, т. е. совпадут точки R_1 и R_2 с точками Q_1 и Q_2 соответственно. Поскольку мы можем выбирать основной меридиан по своему усмотрению, примем за основной меридиан меридиан точки A. От точки Q_1 экватора отложим по окружности основного меридиана дугу φ_1, равную широте первой точки. Если $\varphi_1 > 0$, то дуга откладывается по направлению к полюсу P_1, если $\varphi_1 < 0$, то по направлению к полюсу P_2.

От точки Q_1 по экватору сетки откладываем разность долгот $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Если разность долгот больше 180°, то откладывается величина $\lambda_1 - \lambda_2 < 180°$. Получаем отрезок Q_1N. По меридиану точки N откладываем дугу, равную широте φ_2. Получаем положение точки B.

Затем калька поворачивается вокруг центра так, чтобы точки A и B легли на один меридиан. Поскольку точка A лежит на окружности основного меридиана, это произойдет, когда точка A совместится с полюсом сетки P_1 (рис. 33).

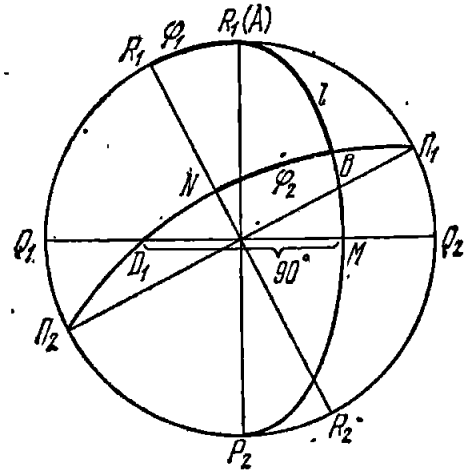

Рис. 33.

Отсчитывая число клеток вдоль меридиана, находим искомую длину l дуги большого круга между точками A и B в градусах.

В более общем случае, когда основной меридиан задан заранее и не совпадает с меридианами точек A и B, а отстоит от одного из них, например, от меридиана

точки A на расстояние $\Delta\lambda_0$, построение производится с учетом этого фактора (рис. 34). От точки Q_1 по экватору сетки откладывается величина $\Delta\lambda_0$ и находится

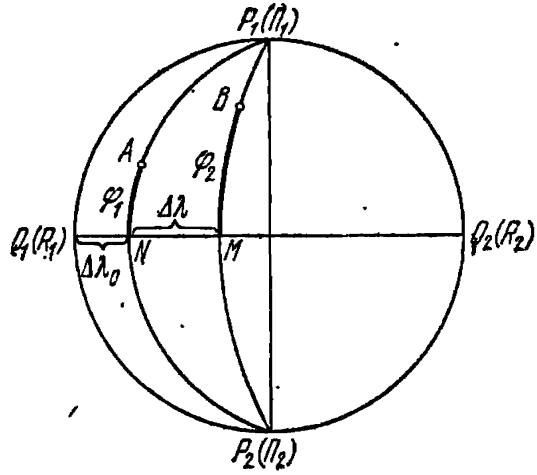

Рис. 34.

отрезок Q_1N. От точки N по дуге меридиана откладывается широта φ_1 и определяется положение точки A. Затем по экватору от точки N откладывается разность

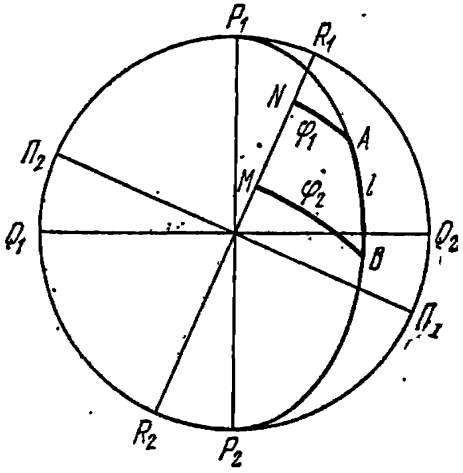

Рис. 35.

долгот $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ и находится точка M — основание меридиана, на котором лежит точка B. Откладывая по этому меридиану широту φ_2, находим положение второй точки B.

. Поворачиваем кальку вокруг центра так, чтобы точки A и B легли на один меридиан (рис. 35). По дуге этого меридиана определяем искомую длину дуги l между точками A и B.

Задача 2. Определение положения полюсов данного большого круга. Дана дуга AB большого круга. Требуется определить положение и координаты полюсов D_1 и D_2 этого круга.

По определению, полюсами большого круга являются точки, отстоящие на 90° от любых точек этого круга.

Как и в предыдущей задаче, строим дугу AB (см. рис. 33). Находим точку пересечения M дуги AB (или ее продолжения) с экватором сетки Q_1Q_2. Откладываем по экватору сетки от точки M отрезок, равный 90°, и находим точку D_1. Эта точка является полюсом дуги AB.

Для определения координат точки D_1 вращаем кальку вокруг ее центра, пока экватор кальки не совпадает с экватором сетки, т. е. возвращаем кальку в начальное положение. Точка D_1 займет какое-то новое положение (см. рис. 32). По меридиану, проходящему через точку D_1, определяем ее расстояние от экватора сетки, равное широте φ_{D_1}. Расстояние по экватору сетки от точки пересечения меридиана точки D_1 до точки Q_1 есть разность долгот полюса D_1 и точки Q_1 $\Delta\lambda_{D_1} = \lambda_{D_1} - \lambda_0$, откуда находим долготу полюса λ_{D_1}:

$$\lambda_{D_1} = \lambda_0 + \Delta\lambda.$$

Координаты второго полюса D_2 определяются из выражений

$$\lambda_{D_2} = \lambda_{D_1} + 180° \text{ и } \varphi_{D_2} = -\varphi_{D_1}.$$

Как правило, второй полюс находится на противоположной части сферы.

Задача 3. Обратная задача: нахождение большого круга и координат точек на нем по заданному положению его полюса. Пусть дана точка D с координатами φ_D, λ_D. Требуется найти большой круг, соответствующий этому полюсу, т. е. такой большой круг, все точки которого находятся на расстоянии 90° от точки D.

Примем, что основной меридиан, проходящий через точку Q_1, имеет долготу λ_0, причем $\Delta\lambda_D = \lambda_D - \lambda_0 < < 90°$ (рис. 36).

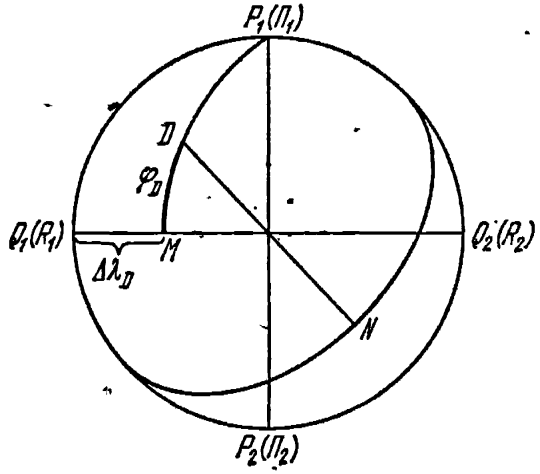

Рис. 36.

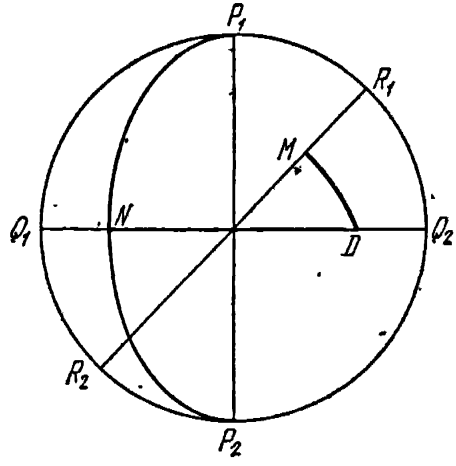

Рис. 37.

Наложим кальку на стереографическую сетку и совместим экватор кальки R_1R_2 с экватором сетки Q_1Q_2. По экватору сетки отложим от точки Q_1 отрезок Q_1M, равный разности долгот $\Delta\lambda_D = \lambda_D - \lambda_0$. По меридиану точки M отложим широту полюса φ_D и найдем положение точки D.

Повернем кальку вокруг ее центра так, чтобы точка D легла на экватор сетки и отложим по экватору отрезок $DN = 90°$ (рис. 37). Меридиан, проходящий через точку N, будет искомой дугой большого круга, полюсом которого является точка D. Перенесем эту дугу на кальку. Для определения координат точек этого большого круга повернем кальку в исходное положение. Теперь каждой точке большого круга будет соответствовать одно определенное пересечение дуг меридиана и параллели, которое определит широту точки большого круга и разность долгот точки большого круга и основного меридиана.

Задача 4. Определение угла между двумя дугами. Даны дуги AB и AC, пересекающиеся в точке A. Требуется определить величину угла BAC.

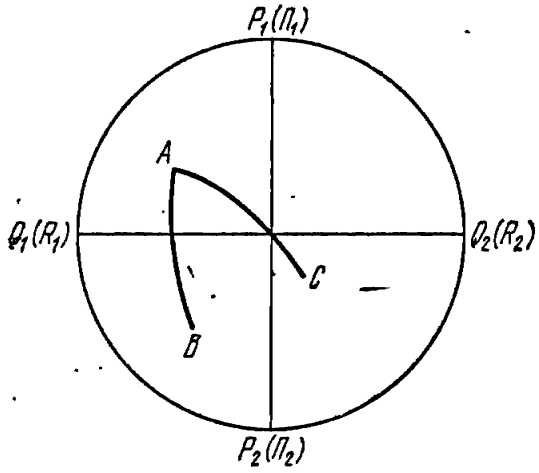

Рис. 38.

В общем случае, когда основной меридиан задан независимо, а положение дуг фиксировано на кальке (рис. 38), поступают следующим образом. Калька накладывается на стереографическую сетку и поворачивается вокруг центра так, чтобы вершина A легла на экватор сетки (рис. 39). Отсчитывая деления сетки по экватору, откладываем отрезок, равный 90°, получаем точку D, которая лежит на меридиане, полюсом которого является точка A. Переносим на кальку дугу меридиана, проходящую через точку D, до пересечения с дугами AB и AC в точках M и N. Дуга MN является

мерой угла BAC. Отсчитывая число делений вдоль меридиана, определяем величину угла BAC.

Если отрезки дуг BA или CA не пересекают меридиан точки D, то их следует продлить. Для этого поворачиваем кальку вокруг центра до тех пор, пока дуга BA не совпадет с каким-либо меридианом. Тогда, продолжая дугу BA по меридиану, найдем точку пересечения M продолжения дуги BA с дугой P_1DP_2.

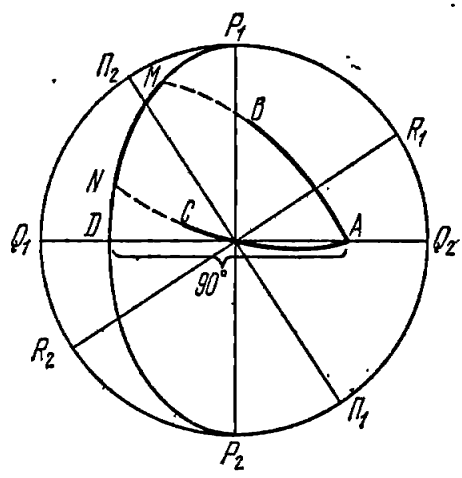

Рис. 39.

В том случае, если вершина A располагается ближе к основному меридиану, чем 90°, отрезок откладывается в другую сторону по экватору, и измеряется дуга вертикального угла, равного углу BAC.

После того как будут освоены эти основные операции, выполняемые со стереографической сеткой, можно перейти к решению сферических треугольников. Собственно говоря, решение сферических треугольников с помощью стереографической сетки сводится к определению положений вершин сферического треугольника на этой сетке, поскольку дальнейшее решение, заключающееся в определении величины сторон и углов, сводится к приведенным выше четырем операциям.

Задача 5. Построение сферического треугольника по трем заданным точкам на сфере и измерение его сторон и углов. Пусть даны три точки $A(\varphi_1, \lambda_1)$, $B(\varphi_2, \lambda_2)$ и $C(\varphi_3, \lambda_3)$,

являющиеся вершинами сферического треугольника. Наложим кальку на стереографическую сетку так, чтобы экватор кальки R_1R_2 совпал с экватором сетки Q_1Q_2, а ось кальки $П_1П_2$ — с осью сетки P_1P_2. Аналогично тому, как это сделано в задаче 1, нанесем на кальку точки A, B и C. Поворачиваем кальку так, чтобы две точки, например A и B, легли на соответствующий меридиан. Перенеся на кальку дугу этого меридиана, получим сторону c искомого сферического треугольника, а сосчитав количество клеток по этому меридиану, находим длину этой стороны. Поворачивая дальше кальку, находим две другие стороны b и a. Полученный треугольник ABC является стереографической проекцией искомого сферического треугольника.

Поворачивая кальку вокруг центра сетки так, чтобы вершина A легла на экватор сетки, аналогично тому, как это было сделано в задаче 4, находим величину угла A. Двумя дальнейшими поворотами находим величины углов B и C. Таким образом определяется положение и величина всех шести элементов сферического треугольника.

Поэтому решение сферического треугольника с помощью стереографической сетки сводится к определению положения трех его вершин в стереографической проекции. Рассмотрим несколько случаев построения сферического треугольника в этой проекции.

Задача 6. Построение сферического треугольника по трем его сторонам. Пусть даны три стороны a; b и c сферического треугольника. Наложим кальку на стереографическую сетку так, чтобы ось кальки $П_1П_2$ совпала с осью сетки P_1P_2. Примем, что вершина A совмещена с полюсом кальки P_1 (рис. 40). Отложим от нее по дуге основного меридиана одну из сторон, например, b. Получим положение другой вершины треугольника, в данном случае C. Далее переносим на кальку параллель MN, отстоящую от вершины A на расстояние, равное стороне c.

Поворачиваем кальку вокруг центра сетки так, чтобы вершина C совместилась с полюсом сетки P_1 (рис. 41). Нанесем на кальку параллель FG, отстоящую от полюса P_1 на величину a. Она пересечет дугу MN в точке B, являющейся третьей вершиной. Дуга меридиана, соединяющего точки B и C, есть сторона a. Повернув

кальку обратно до совмещения вершины A с полюсом сетки P_1 по дуге меридиана, проходящего через вершины A и B, наносим на кальку сторону c (стороны a

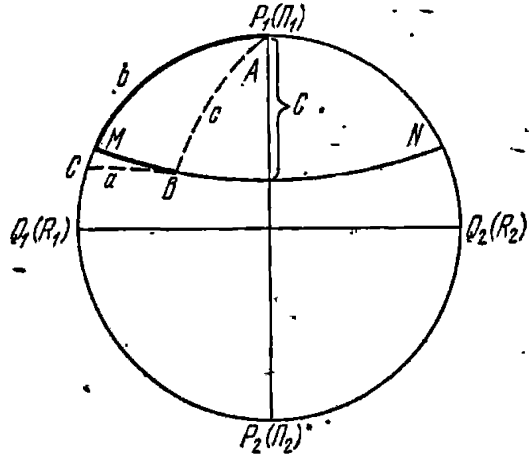

Рис. 40.

и c изображены на рис. 40 прерывистыми линиями). Так осуществляется построение сферического треугольника по трем сторонам. После того как на кальку

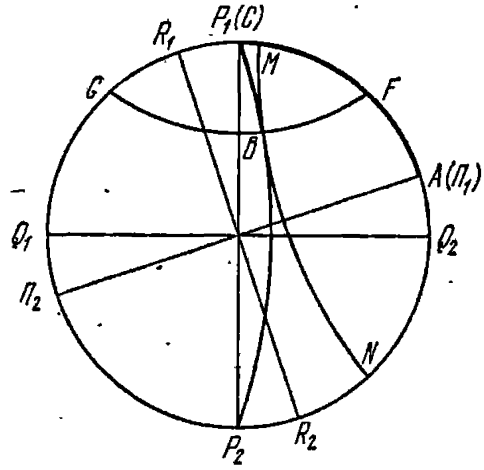

Рис. 41.

нанесены вершины сферического треугольника ABC, приемами, описанными в задачах 4 и 5, находим величины углов A, B и C.

Задача 7. Построение сферического треугольника по двум сторонам и углу между ними. Пусть даны две стороны b и c и угол A. Накладываем кальку на сетку и совмещаем полюсы $П_1$ и P_1, $П_2$ и P_2. Примем, что вершина A совпадает с полюсом $П_1$. По дуге основного меридиана откладываем одну из сторон, например, b, и получаем вершину C (рис. 42). По экватору сетки отложим от

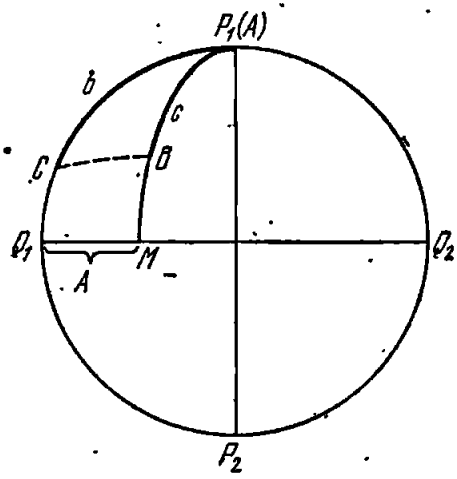

Рис. 42.

основного меридиана дугу Q_1M, равную A. Найдем меридиан сетки, проходящий через точку M и перенесем его на кальку. По этому меридиану от точки A отложим вторую данную сторону c и находим положение третьей вершины B. Поворачиваем кальку так, чтобы вершина C совпала с полюсом сетки P_1. По меридиану, проходящему через точку C, строим третью сторону a. После того как сферический треугольник построен, приемами, описанными в задачах 1 и 4, находим неизвестные стороны и углы.

Задача 8. Построение сферического треугольника по двум сторонам и противолежащему углу. Пусть даны две стороны b и c и угол C. Как и раньше, накладываем кальку на стереографическую сетку и совмещаем полюсы $П_1$ и P_1, $П_2$ и P_2, и принимаем, что вершина A совмещена с полюсом $П_1$. По основному меридиану от полюса P_1 откладываем дугу, равную b, и находим вершину C. Переносим

на кальку параллель MN, находящуюся на расстоянии c от вершины A. Поворачиваем кальку до совмещения вершины C с полюсом P_1. По экватору сетки от точки Q_2 откладываем отрезок Q_2S, равный C, и переносим на кальку, меридиан, проходящий через точку S. Отрезок дуги меридиана от вершины C до пересечения с дугой MN является второй стороной сферического треугольника a, а точка пересечения — вершиной B. Возвращая кальку в исходное положение, совмещаем точку A с полюсом P_1. По меридиану, проходящему через точку B, проходит третья сторона c, совпадающая с отрезком дуги AB.

После того как треугольник построен, приемами, описанными в задачах 1 и 4, находим неизвестные стороны и углы.

Путем различных комбинаций приемов, описанных выше, можно построить сферический треугольник по любому варианту заданных элементов. Некоторую сложность представляет только случай построения сферического треугольника по трем углам, но его всегда можно упростить, рассматривая треугольник, полярный данному. Поскольку стороны полярного треугольника равны дополнениям углов данного сферического треугольника до 180°, можно построить треугольник, полярный данному, по трем сторонам, а затем перейти к искомому, построив полюсы дуг больших кругов, совпадающих со сторонами полярного треугольника. Различным упрощениям могут быть подвергнуты и решения сферических треугольников, в зависимости от конкретных условий, которые здесь не рассматриваются.

Из других задач сферической тригонометрии рассмотрим здесь только две: построение окружности заданного углового радиуса вокруг данной точки и определение площади фигуры на сфере.

Задача 9. Построение окружности заданного радиуса вокруг данной точки. Дана точка $A(\varphi, \lambda)$ и угловой радиус, равный дуге a (рис. 43). Как в задаче 1, находим положение точки A. По меридиану точки A, вверх и вниз, откладываем дугу a и находим две точки M и N, которые соответствуют заданному расстоянию a. Поворачиваем кальку и переводим точку A на другой меридиан и снова откладываем дугу a и находим новые точки. Повторяя эту

Таблица 5

φ	s	φ	s	φ	s	φ	s	φ	s
0°		16°		32°		48°		64°	
	4,005		3,841		3,348		2,626		1,707
2°		18		34		50		66	
	4,005		3,775		3,283		2,528		1,576
4		20		36		52		68	
	4,005		3,742		3,184		2,396		1,313
6		22		38		54		70	
	3,972		3,677		3,119		2,265		1,169
8		24		40		56		72	
	3,956		3,611		3,020		2,167		1,103
10		26		42		58		74	
	3,939		3,578		2,922		2,068		1,037
12		28		44		60		76	
	3,906		3,513		2,823		1,937		0,899
14		30		46		62		78	
	3,874		3,447		2,725		1,806		0,768
16		32		48		64		80	

операцию несколько раз, находим положение множества точек, определяющих искомую окружность.

В случае, если заданная точка, например, A_1, находится на окружности кальки, задача упрощается. Нужно только совместить точку A_1 с полюсом сетки P_1 и

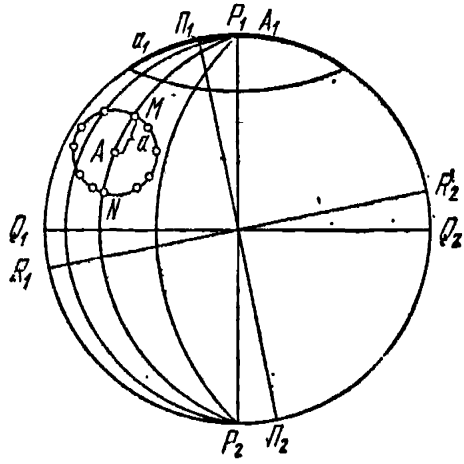

Рис. 43.

скопировать параллель, находящуюся на заданном угловом расстоянии a. Полученная параллель будет дугой искомой окружности.

Задача 10. Определение площади фигуры на сфере. Площадь той или иной фигуры на сфере выражается в квадратных градусах. Чтобы определить площадь какой-либо фигуры на сфере, в том числе сферического треугольника, нужно нанести эту фигуру на кальку, наложить кальку на стереографическую сетку и сосчитать количество клеток, занимаемое этой фигурой.

Каждая клетка имеет площадь, зависящую от удаления этой клетки от экватора, т. е. от ее широты φ. Зависимость площади этих клеток S в квадратных градусах в зависимости от широты φ приводится в табл. 5, заимствованной из книги «Астрономический календарь. Постоянная часть», изд. 6-е, М., «Наука», 1973, стр. 198.

§ 20. Общие случаи решения сферического треугольника

Задача 1. Решение сферического треугольника по трем сторонам.

Пусть *дано*: $a = 38°15'13''$, $b = 19\,47\,32$, $c = 44\,50\,49$. Требуется *найти*: A, B, C.

Проверяем, соответствуют ли заданные стороны условиям существования сферических треугольников. Поскольку заданы только стороны, таких условий будет два: сумма всех сторон должна быть больше 0° и меньше 360° и сумма двух сторон должна быть больше третьей. Эти условия удовлетворяются:

$$a + b + c = 102°53'34'' \text{ и } a + b = 58°02'45'' \ (>c),$$
$$b + c = 64°38'21'' \ (>a), \quad c + a = 83°06'02'' \ (>b).$$

Предварительное приближенное решение с помощью стереографической сетки дает (рис. 44): $A \approx 60°$, $B \approx 28°$ и $C \approx 100°$. Величины этих углов таковы, что углы A и C лучше определять по косинусу, а угол B — по синусу. Поэтому для нахождения A и C используем основные формулы косинусов (18) и (20), а для про-

межуточного контроля и вычисления B — формулу синусов (25):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Преобразуем первые две формулы, перенося косинус угла в левую часть формулы и разделив ее на произведение синусов:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} =$$

$$= \cos a \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c -$$

$$- \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c,$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} =$$

$$= \cos c \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b -$$

$$- \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b,$$

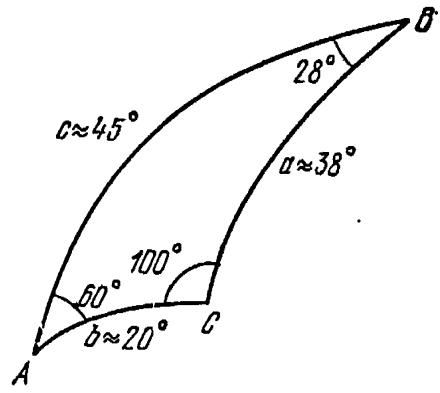

Рис. 44.

Эти формулы можно использовать и в том, и в другом варианте. Для контроля используем формулу пяти элементов, а именно первую формулу группы (29):

$$\sin A \cos B = \cos b \sin C - \cos c \sin B \cos A.$$

Решение.

Вычисление угла A:

$\cos a$	$= 0{,}785278$
$\operatorname{cosec} b$	$= 2{,}95325$
$\operatorname{cosec} c$	$= 1{,}418007$
$\cos a \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c$	$= 3{,}288532$
$-\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$	$= 2{,}793676$
$\cos A$	$= 0{,}494856$
A	$= 60°20'23''$

Решение однозначное.

Промежуточный контроль:

$\sin a$	$= 0{,}619143$
$\sin A$	$= 0{,}868975$
$\dfrac{\sin a}{\sin A}$	$= 0{,}712498$

Вспомогательная схема:

$\operatorname{ctg} a$	$= 1{,}268330$
$\operatorname{ctg} b$	$= 2{,}77879$
$\operatorname{ctg} c$	$= 1{,}005357$

Вычисление угла C:

$\cos c$	$= 0{,}708993$
$\operatorname{cosec} a$	$= 1{,}615135$
$\operatorname{cosec} b$	$= 2{,}95325$
$\cos c \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b$	$= 3{,}381824$
$-\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b$	$= 3{,}524423$
$\cos C$	$= -0{,}142599$
C	$= 98°11'54''$

Решение однозначное.

$\sin c = 0{,}705215$
$\sin C = 0{,}989780$

$\dfrac{\sin c}{\sin C} = 0{,}712497$

Вычисление угла B:
$\sin b = 0{,}338610$
$\sin C = 0{,}989780$
$\sin c = 0{,}705215$

$\sin B = 0{,}475244$
$B_1 = 28°22'31''$
$B_2 = 151\ 37\ 29$

Анализ:

Второе решение B_2 не удовлетворяет тому условию существования сферического треугольника, которое требует, чтобы сумма двух углов без третьего была меньше 180°:

$C + B_2 - A = 189°29'00'' > 180°$

Контроль:
$\sin A = 0{,}868975$
$\cos B = 0{,}879854$
Левая $= 0{,}764571$

$\cos b = 0{,}940927$
$\sin C = 0{,}989780$
$\cos c = 0{,}708993$

$\sin b = 0{,}475244$
$\cos A = 0{,}494856$
$\cos b \sin C = 0{,}931311$
$-\cos c \sin B \cos A = 0{,}166739$

Правая $= 0{,}764572$

Контроль сошелся нормально.

Поэтому решением является угол $B_1 = 28°22'31''$.

Проверим, удовлетворяют ли найденные величины условиям существования сферического треугольника:

3. Сумма углов *):

$$180° < A + B + C = 186°54'48'' < 540°.$$

4. Сумма двух углов без третьего:

$$A + B - C = -9°29'00'' < 180°,$$
$$B + C - A = 66\ 14\ 02 < 180,$$
$$C + A - B = 130\ 09\ 46 < 180.$$

5. Суммы двух углов соответствуют суммам противолежащих сторон:

$A + B = 88°42'54'' < 180°$ и $a + b = 58°02'45'' < 180°$,
$B + C = 126\ 34\ 25 < 180$ и $b + c = 64\ 38\ 21 < 180$,
$C + A = 158\ 32\ 17 < 180$ и $c + a = 83\ 06\ 02 < 180$.

*) Здесь и далее указываются номера условий, под которыми они приведены в § 4—6.

6. Разность двух сторон соответствует разностям противолежащих углов:

$$a-b=\ 18°27'41''>0 \text{ и } A-B=\ 31°57'52''>0,$$
$$b-c=-25\,03\,17<0 \text{ и } B-C=-69\,49\,23<0,$$
$$c-a=\ 6\,35\,36>0 \text{ и } C-A=\ 37\,51\,31>0.$$

Таким образом, найденные величины углов соответствуют всем условиям существования сферического треугольника.

Ответ: $A=60°20'23''$, $B=28°22'31''$ и $C=98°11'54''$.

Задача 2. Решение сферического треугольника по трем углам.

Пусть *дано*:	Требуется *найти*
$A=\ 126°55'18''$,	a, b, c.
$B=\ 29\,59\,14$,	
$C=\ 33\,40\,50$.	

Проверяем, соответствуют ли заданные углы условиям существования сферических треугольников. Поскольку заданы только углы, таких условий будет только два: сумма углов должна быть больше 180° и меньше 540° и сумма двух углов без третьего должна быть меньше 180°. Эти условия удовлетворяются:

$$A+B+C=\ 190°35'22'',$$
$$A+B-C=\ 123\,13\,42,$$
$$B+C-A=-63\,15\,14,$$
$$C+A-B=130\,36\,54.$$

Предварительное приближенное решение с помощью стереографической сетки дает: $a\approx 64°$, $b\approx 34°$, $c\approx 38°$ (рис. 45).

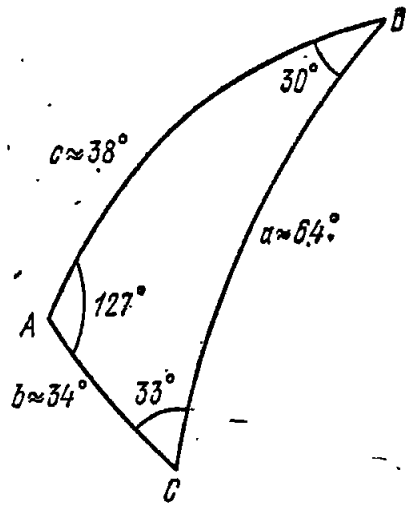

Рис. 45.

Все величины достаточно удалены и от 0°, и от 90°, поэтому можно применять практически любые формулы и определять неизвестные как по синусу, так и по тангенсу. Используем основные формулы угла косинуса

сферического треугольника (22), (23) и (24):

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$
$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b,$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

которые преобразуем, перенося косинус неизвестной стороны в левую часть:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$
$$\cos b = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A},$$
$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

В случае, если какая-либо из сторон оказалась бы мала, то для ее определения лучше было бы использовать формулу пяти элементов (29), перенеся косинус неизвестной стороны в левую часть.

Для контроля используем формулу синусов (25):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Решение:

Вычисление стороны a:

$\sin B =$	0,499807
$\sin C =$	0,554562
$\cos B =$	0,866137
$\cos C =$	0,832142
$\cos A =$	−0,600723
$\cos B \cos C =$	0,720749
$\cos A + \cos B \cos C =$	0,120026
$\sin B \sin C =$	0,277174
$\cos a =$	0,433035

Решение однозначное:

$a = 64°20'23''$

Вычисление стороны b:

$\sin C =$	0,554562
$\sin A =$	0,799458
$\cos C =$	0,832142
$\cos A =$	−0,600723
$\cos B =$	0,866137
$\cos B \cos A =$	−0,499887
$\Sigma =$	0,366250
$\sin B \sin A =$	0,443349
$\cos b =$	0,826099

Решение однозначное:

$b = 34°18'00''$

Контроль:

$\sin a =$	0,901378
$\sin A =$	0,799458
$\frac{\sin a}{\sin A} =$	1,127486

Вычисление стороны c:

$$\sin A = 0{,}799458$$
$$\sin B = 0{,}499807$$
$$\cos A = -0{,}600723$$
$$\cos B = 0{,}866137$$
$$\cos C = 0{,}832142$$
$$\cos A \cos B = -0{,}520308$$
$$\cos C + \cos A \cos B = 0{,}311834$$
$$\sin A \sin B = 0{,}399575$$

$$\cos c = 0{,}780414$$

Решение однозначное:

$$c = 38°42'05''$$

$$\sin b = 0{,}563526$$
$$\sin B = 0{,}499807$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = 1{,}127487$$
$$\sin c = 0{,}625262$$
$$\sin C = 0{,}554562$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = 1{,}127488$$

Контроль сошелся нормально.

Поскольку все искомые величины получены однозначно, делается не анализ, а только проверка, удовлетворяют ли найденные величины условиям существования сферического треугольника. Действительно

1. Суммы двух сторон больше третьей:

$$a + b = 98°38'23'' > c,$$
$$b + c = 73\,00\,05 > a,$$
$$c + a = 103\,02\,28 > b.$$

2. Сумма сторон:

$$0 < a + b + c = 137°20'28'' < 360°.$$

5. Суммы углов соответствуют суммам сторон:

$$A + B = 156°54'32'' < 180° \text{ и } a + b = 98°38'23'' < 180°,$$
$$B + C = 63\,40\,04 < 180 \text{ и } b + c = 73\,00\,05 < 180,$$
$$C + A = 160\,36\,08 < 180 \text{ и } c + a = 103\,02\,28 < 180.$$

6. Разности двух сторон соответствуют разностям противолежащих углов:

$$a - b = 30°02'23'' > 0, \text{ и } A - B = 98°56'04'' > 0,$$
$$b - c = -4\,24\,05 < 0, \text{ и } B - C = -3\,41\,36 < 0,$$
$$c - a = -25\,38\,18 < 0, \text{ и } C - A = -93\,14\,28 < 0.$$

Таким образом, найденные результаты соответствуют условиям существования сферического треугольника.

Ответ. $a = 64°20'23''$; $b = 34°18'00''$; $c = 38°49'05''$.

Задача 3. Решение сферического треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Пусть *дано*:
$a = 64°20'25''$,
$b = 34\,18\,01$,
$C = 33\,40\,50$.

Требуется *найти*:
c, A, B.

Предварительное рассмотрение показывает, что данные элементы аналогичны элементам сферического треугольника в задаче 2. Поэтому искомые величины будут: $c \approx 39°$, $A \approx 126°$ и $B \approx 30°$.

Задача может быть решена двумя способами: прямым, т. е. с использованием основных формул сферической тригонометрии, или по формулам аналогии Непера. Первый способ удобнее в тех случаях, когда искомые величины достаточно далеки от 0, 90 или 180°, и аргументы получаются и по синусу и по косинусу достаточно уверенно.

Решение по основным формулам. Так как угол $A \approx 126°$, а его дополнение до 180° составляет примерно 54°, а две другие искомые величины также существенно отличаются от 0 и от 90°, то точность их определения по косинусу и по синусу примерно одинакова; только для B, не превышающего 30°, несколько предпочтительнее синус. Поэтому решение по формулам синуса (25) было бы наиболее предпочтительным. Однако при этом нам не хватает одного элемента в пропорциях, и его нужно определить по основным формулам. Угол A для этого не годится, так как для его вычисления требуются все три стороны. Поэтому мы определяем сторону c по формуле (20)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

а затем по формулам синуса (25) ищем остальные элементы:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad \text{и} \quad \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

откуда получаем искомые элементы:

$$\sin A = \frac{\sin C \sin a}{\sin c}, \quad \sin B = \frac{\sin C \sin b}{\sin c}.$$

Для контроля используем формулу пяти элементов (28):

$$\sin b \cos A = \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B.$$

Поскольку элементы сферического треугольника почти совпадают с элементами сферического треугольника из задачи 2, численное решение здесь не приводится. В ходе решения определяются $\sin A = 0{,}799456$ и $\sin B = 0{,}499807$. Углы A и B, которые находятся по синусу, получают по два значения: $A_1 = 53°04'42''$, $A_2 = 126°55'18''$, $B_1 = 29°59'14''$, $B_2 = 150°00'46''$.

Анализ решения. Для каждого из искомых углов получено по два значения: A_1 и A_2, B_1 и B_2. Значения A_1 и B_1 совместно существовать не могут, так как при этом сумма углов $A_1 + B_1 + C = 116°44'46'' < 180°$, и не соблюдается третье условие существования сферического треугольника. Значения A_2 и B_2 также совместно существовать не могут: $A_2 + B_2 - C = 243°15'14'' > 180°$ — нарушено четвертое условие. Для определения того, какая пара, A_1 и B_2 или A_2 и B_1, составляет решение или обе составляют решения, воспользуемся шестым условием существования сферических треугольников. Так как $a - b = 30°02'24''$, что больше нуля, то и разность $A - B$ должна быть больше нуля, Этому условию удовлетворяет разность пары A_2B_1: $A_2 - B_1 \approx 96°$. Другая пара не годится: $A_1 - B_2 \approx \approx -97° < 0$.

Вычисляя сторону c (конкретные вычисления и контроль предоставляем сделать, по аналогии с предыдущими задачами, читателю), находим: $\cos c = 0{,}780412$. Так как решение однозначное, то $c = 38°42'06''$.

Ответ: $c = 38°42'06''$; $A = 126°55'18''$; $B = 29°59'14''$.

Решение по формулам аналогий Непера.

Пусть *дано*:	Требуется *найти*:
$a = 38°15'13''$,	c, A, B.
$b = 19\ 47\ 32$,	
$C = 98\ 11\ 53$.	

Заданные элементы аналогичны элементам сферического треугольника в задаче 1, поэтому проверка условий существования сферического треугольника и предварительное решение выполняются аналогично и здесь опускаются (см. рис. 46).

Для вычисления углов A и B можно применить аналогии Непера (57) и (58):

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\,\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\,\frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}.$$

Для определения правильности найденных углов (промежуточный контроль) используем формулу Гаусса (61)

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2}}.$$

Сторона c определяется с помощью аналогий Непера для сторон сферического треугольника (59) и (60), преобразованных к виду

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2}\cdot\sin\dfrac{A+B}{2}}{\sin\dfrac{A-B}{2}},$$

причем для определения стороны c может быть использована каждая из этих формул, а другая — для параллельного контроля.

В результате решения, которое предоставляем сделать читателю, находим

$$c=44°50'48'',\quad A=60°20'25''\quad\text{и}\quad B=28°22'31''.$$

Задача 4. Решение сферического треугольника по двум углам и стороне между ними. Как и задача 3, данная задача решается двумя способами: по основным формулам и по формулам аналогий Непера.

Решение задачи по основным формулам.

Пусть *дано*:	Требуется *найти*:
$A = 60°20'25''$,	C, a, b.
$B = 28\,22\,31$,	
$c = 44\,50\,49$.	

Как и в предыдущем случае, данные элементы аналогичны элементам сферического треугольника по задаче 1. Поэтому не будем повторять приближенного решения и последующей проверки условий существования сферического треугольника.

Угол C близок к 90°, поэтому для его определения целесообразнее применить основную формулу косинуса (24)

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

Стороны a и b невелики и для их определения пользуемся формулами синусов (25):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}, \quad \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

откуда

$$\sin a = \frac{\sin c \sin A}{\sin C}, \quad \sin b = \frac{\sin c \sin B}{\sin C}.$$

Для контроля годится формула пяти элементов (28):

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A.$$

Поскольку элементы данного сферического треугольника близки элементам сферического треугольника в задаче 1, численное решение здесь не приводится.

Ответ. $C = 98°11'53''$, $a = 38°15'13''$ и $b = 19°47'32''$.

Решение по формулам аналогии Непера.

Пусть *дано*:	Требуется *найти*:
$A = 126°55'18''$,	a, b, C.
$B = 29\,59\,14$,	
$c = 38\,42\,06$.	

Заданные элементы аналогичны элементам сферического треугольника в задаче 2, поэтому предварительное приближенное решение и проверка соответствия могут быть проконтролированы там (см. рис. 45).

Стороны a и b вычисляются по формулам аналогий Непера (60) и (59), записанных в виде

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\operatorname{tg}\frac{c}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\operatorname{tg}\frac{c}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}.$$

Из решений по этим формулам находим величины m и n:

$$m=\frac{a+b}{2}\quad\text{и}\quad n=\frac{a-b}{2},$$

откуда получаем a и b.

Промежуточный контроль выполняется по формуле Гаусса (61).

Для определения угла C используем две другие аналогии Непера (57) и (58), одна из которых служит для определения величины C, а другая — для контроля:

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{a-b}{2}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}\cdot\sin\dfrac{a+b}{2}}{\sin\dfrac{a-b}{2}}.$$

Численное решение читатель может провести сам.

Искомые величины равны:

$a=64°20'24''$, $b=34°18'00''$ и $C=33°40'50''$.

Задача 5. Решение сферического треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.

Пусть *дано*:

$a=64°20'23''$,
$b=34\ 18\ 00$,
$A=126\ 55\ 18$.

Требуется *найти*:

c, B, C.

Предварительное приближенное решение и заключительная проверка соответствия углов и сторон условиям существования сферического треугольника — как и в задаче 2 (см. рис. 45).

При решении этой задачи применяется комбинированный выбор формул. Угол B, который по приближенному решению примерно равен 30°, можно определить по одной из основных формул синусов (25),

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B},$$

откуда

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a},$$

и проконтролировать по формуле Гаусса (61).

Для вычисления величины угла C и стороны c используем формулы (57)—(60) аналогий Непера.

Две формулы используются для нахождения угла C и стороны c, две другие — для контроля.

Поскольку сферический треугольник в этой задаче аналогичен сферическому треугольнику в задаче 2, численное решение опускается. Вычисление угла C проводится аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче и здесь не приводится.

Ответ. $c = 38°42'06''$, $B = 29°59'14''$ и $C = 33°40'50''$.

Задача 6. Решение сферического треугольника по двум углам и стороне, лежащей против одного из них.

Пусть *дано*:	Требуется *найти*:
$A = 126°55'18''$,	b, c, C.
$B = 29\ 59\ 14$,	
$a = 64\ 20\ 23$.	

Предварительное приближенное решение и заключительная проверка соответствия углов и сторон условиям существования сферического треугольника — как и в задаче 2.

По характеру решения задача близка к задаче № 5. Здесь также применяется комбинированный выбор формул, только вместо угла в данном случае по одной

из формул синусов (25) находится сторона b:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B},$$

откуда

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}.$$

Для контроля определения стороны используется формула Гаусса (61).

Угол C и сторона c, как и в предыдущей задаче, определяются по формулам (57)—(60) аналогий Непера. Поскольку формулы, исходные данные и конечный результат полностью идентичны формулам, исходным данным и конечному результату задачи 5, мы их здесь не приводим.

Искомые элементы равны:

$$b = 34°18'00'', \quad c = 38°42'06'' \quad \text{и} \quad C = 33°40'50''.$$

§ 21. Другие способы решения косоугольного сферического треугольника

Так как при вычислениях с логарифмами операции сложения и вычитания, входящие в основные формулы, были весьма неудобными, то вычислители прошлого прибегали к разнообразным приемам, чтобы упростить рабочие формулы и привести их к виду, удобному для логарифмирования. Таких приемов было довольно много и иногда они были весьма изощренными. После перехода к вычислению с помощью арифмометров, а позднее — к вычислениям на электронных вычислительных машинах — необходимость в таких преобразованиях в значительной мере уменьшилась. Поэтому здесь будут приведены только описания трех основных приемов вычислений сферических треугольников с помощью определенных преобразований, которые могут быть применены и в настоящее время.

А. Решение сферического треугольника путем использования полярного ему сферического треугольника

По свойству полярных треугольников, описанному в § 5, соответствующие стороны и углы взаимно полярных треугольников дополняют друг друга до 180°.

Согласно формуле (13)

$$A + a_1 = 180°, \quad B + b_1 = 180°, \quad C + c_1 = 180°.$$

Эти формулы позволяют перейти от сторон сферического треугольника к углам и наоборот. Если по какой-либо причине нежелательно решать данный сферический треугольник по заданным элементам, то по этой формуле можно перейти к полярному треугольнику, у которого известны противоположные элементы, и решать задачу по другому варианту, а потом снова перейти к данному.

Например, в задаче 2 предыдущего параграфа даны три угла:

$$A = 126°55'18'', \; B = 29°59'14'' \text{ и } C = 33°40'50''.$$

Если почему-либо неудобно применять способ решения, описанный в этой задаче, всегда можно перейти к полярному треугольнику, у которого известны три стороны:

$$a_1 = 180° - A = 53°04'42'',$$
$$b_1 = 180 - B = 150\,00\,46,$$
$$c_1 = 180 - C = 146\,19\,10,$$

и решать сферический треугольник по способу, приведенному в задаче 1 предыдущего параграфа. В результате решения будут получены три угла полярного треугольника $A_1 = 115°39'37''$, $B_1 = 145°42'00''$ и $C_1 = 141°10'55''$, зная которые, по формулам (14) можно определить искомые стороны данного треугольника:

$$a = 180° - A_1 = 180° - 115°39'37'' = 64°20'23'',$$
$$b = 180 - B_1 = 180 - 145\,42\,00 = 34\,18\,00,$$
$$c = 180 - C_1 = 180 - 141\,10\,55 = 38\,49\,05.$$

Так можно поступить и во всех других случаях.

Б. *Решение сферического треугольника с помощью разделения на два прямоугольных треугольника*

Пусть даны две стороны и угол между ними: a, b и C. Требуется найти c, A и B.

Опустим сферический перпендикуляр AD из вершины A на основание BC (рис. 46). Получим два

прямоугольных сферических треугольника ACD и ADB. Обозначим высоту AD буквой h, отрезок от основания перпендикуляра D до вершины C буквой m, а углы CAD и DAB буквами α и β так, что $A = \alpha + \beta$. Подобное построение всегда возможно, поскольку высота может быть опущена как на саму сторону CD, так и на ее продолжение, только углы α и β будут иметь разные знаки.

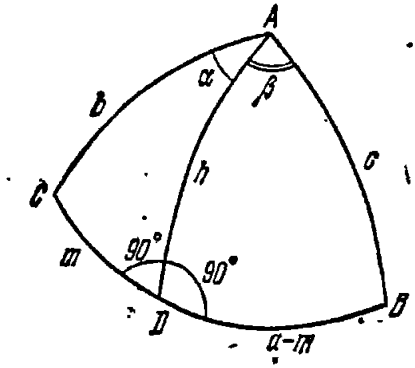

Рис. 46.

Теперь по одной из формул (65) правила Непера — Модюи находим

$$\cos C = \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} (90° - m),$$

откуда

$$\operatorname{tg} m = \cos C \operatorname{tg} b.$$

Для стороны h находим

$$\sin h = \sin b \sin C.$$

Для угла α по первой формуле (65):

$$\cos b = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} C,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \alpha = \cos b \operatorname{tg} C.$$

Для прямоугольного сферического треугольника ADB аналогичным образом находим, принимая сторону $DB = a - m$ и считая m и h известными,

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} h \sin (a - m),$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} (a - m) \sin h.$$

Зная теперь углы α и β, получаем угол A, так как по построению $A = \alpha + \beta$.

Для контроля могут быть использованы, как и обычно, формулы синусов (25):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

В случае, если перпендикуляр AD опущен на продолжение стороны BC, аргумент тригонометрических функций меняется на $m - a$, а угол β на $-\beta$.

В. *Решение сферического треугольника путем введения вспомогательного угла*

Пусть даны две стороны и угол между ними a, b и C. Требуется найти c, A и B.

Преобразуем основную формулу косинуса стороны (20):

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C =$$
$$= \cos a \,(\cos b + \sin b \operatorname{tg} a \cos C).$$

Введем вспомогательный угол ξ, определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} a \cos C.$$

Поскольку сторона a и угол C заданы, легко можно вычислить величину вспомогательного угла. Теперь

$$\cos c = \cos a \,(\cos b + \operatorname{tg} \xi \sin b) =$$
$$= \frac{\cos a \,(\cos b \cos \xi + \sin b \sin \xi)}{\cos \xi} = \frac{\cos a \cos (b - \xi)}{\cos \xi}.$$

По этой формуле легко находим сторону c, так как ξ известно.

Для определения углов A и B используем основные формулы четырех элементов с котангенсами (31),

$$\cos b \cos C = \sin b \operatorname{ctg} a - \sin C \operatorname{ctg} A,$$
$$\cos a \cos C = \sin a \operatorname{ctg} b - \sin C \operatorname{ctg} B,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} A \sin C = \sin b \operatorname{ctg} a - \cos b \cos C,$$
$$\operatorname{ctg} B \sin C = \sin a \operatorname{ctg} b - \cos a \cos C.$$

Выше было принято, что $\operatorname{tg} a \cos C = \operatorname{tg} \xi$ или $\operatorname{ctg} a = \cos C \operatorname{ctg} \xi$. Для определения второго угла введем другой вспомогательный угол ζ, определяемый из равенства $\operatorname{ctg} b = \cos C \operatorname{ctg} \zeta$ или, что то же, $\operatorname{tg} \zeta = \cos C \operatorname{tg} b$. Заменим в первом уравнении $\operatorname{ctg} a$, а во втором $\operatorname{ctg} b$ их значениями, выраженными через вспомогательные углы ξ и ζ и преобразуем формулы (Для краткости преобразуем только одно первое уравнение.

Второе преобразуется аналогично.):

$$\operatorname{ctg} A \sin C = \sin b \cos c \operatorname{ctg} \xi - \cos b \cos C =$$

$$= \cos C (\sin b \operatorname{ctg} \xi - \cos b) =$$

$$= \frac{\cos C (\sin b \cos \xi - \cos b \sin \xi)}{\sin \xi} = \frac{\cos C \sin (b - \xi)}{\sin \xi},$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos C \sin (b - \xi)}{\sin \xi \sin C} = \frac{\sin (b - \xi)}{\operatorname{tg} C \sin \xi},$$

или, окончательно,

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin \xi \operatorname{tg} C}{\sin (b - \xi)}.$$

Преобразования второго уравнения приведут к выражению

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin \zeta \operatorname{tg} C}{\sin (a - \zeta)}.$$

По этим коротким формулам достаточно просто вычисляются величины углов A и B.

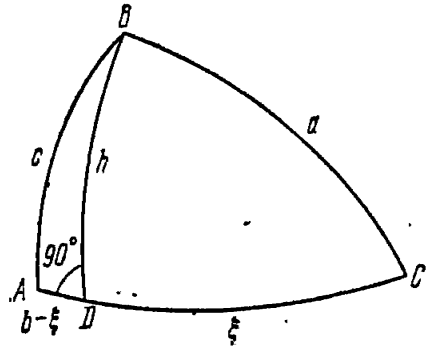

Рис. 47.

Для контроля могут служить, как это чаще всего бывает, формулы синусов (25):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Следует отметить, что введение вспомогательного угла имеет определенный физический смысл. Если опустить из вершины B перпендикуляр BD к стороне $AC = b$, то он разделит сторону b в отношении $\frac{b - \xi}{\xi}$ и образует два прямоугольных треугольника ABD и BDC со сторонами c, h и $b - \xi$ и a, h, ξ, где $h = BD$ (рис. 47).

§ 22. Решение прямоугольного сферического треугольника

Решение прямоугольного сферического треугольника подчиняется тем же правилам, что и общий случай решения сферического треугольника. Различие заклю-

чается только в том, что в прямоугольном сферическом треугольнике один угол (принимается, что это угол A) всегда равен 90°; косинус его всегда равен нулю, синус — единице, и формулы для решения прямоугольных сферических треугольников имеют существенно более простой вид.

Так как в прямоугольном сферическом треугольнике прямой угол всегда задан, то для решения прямоугольного сферического треугольника достаточно знать два других его элемента. Комбинации этих пар элементов определяют шесть вариантов решения прямоугольных сферических треугольников: 1) по двум катетам, 2) по гипотенузе и катету, 3) по катету и противолежащему углу, 4) по катету и прилежащему углу, 5) по гипотенузе и одному углу и 6) по двум углам.

Для решения прямоугольного сферического треугольника бывает полезно составить схему, соответствующую рис. 26, и по правилу Непера — Модюи выбрать из групп (64) и (65) формулы, связывающие искомые элементы с данными. При этом вовсе не обязательно, чтобы искомый элемент сразу находился в левой части формулы, потому что эти формулы легко поддаются преобразованиям.

При решении прямоугольных сферических треугольников следует стремиться определять искомые величины только через данные, без использования найденных в ходе решения неизвестных. Для прямоугольных сферических треугольников это почти всегда возможно, хотя в общих случаях для косоугольных сферических треугольников такая возможность предоставляется далеко не всегда.

Но при этом следует помнить, что выбранные формулы должны учитывать правила § 17 и не приводить к потере точности.

Контроль решения прямоугольного сферического треугольника, как правило, осуществляется по формуле, связывающей все три найденных элемента.

Проверку того, удовлетворяют ли полученные решения условиям существования сферического треугольника, предоставляем читателю выполнять самому. При этом можно использовать примеры, приведенные в задачах 1 и 2 § 20.

Задача 1. Решение прямоугольного сферического треугольника по двум катетам.

Пусть дано: Требуется *найти:*

$b = 150°07'$, a, B, C.
$c = 114.16.$

Приближенное решение показывает, что гипотенуза $a \approx 70°$, а углы $B \approx 150°$ и $C \approx 102°$, поэтому для a и C лучше пользоваться косинусом или тангенсом, но не синусом. По правилу Непера — Модюи для гипотенузы a по формуле группы (64) имеем

$$\cos a = \sin(90° - b)\sin(90° - c) = \cos b \cos c.$$

Для угла B по формуле группы (65) находим

$$\cos(90° - c) = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}(90° - b), \text{ или } \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}.$$

Точно так же для угла C находим

$$\cos(90° - b) = \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg}(90° - c), \text{ или } \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

В качестве контрольной используем формулу, соединяющую все три найденных элемента:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

Искомые величины определяются по косинусу и тангенсам, следовательно, решение будет однозначным.

Решение.

Вычисление гипотенузы a:

$\cos b = -0{,}86704$
$\cos c = -0{,}41098$

$\cos a = 0{,}35634$
$a = 69°07'$

Вычисление угла B:

$\operatorname{tg} b = -0{,}57464$
$\sin c = 0{,}91164$

$\operatorname{tg} B = -0{,}63034$
$B = 147°47'$

Вычисление угла C:

$\operatorname{tg} c = -2{,}2182$
$\sin b = 0{,}49824$
$\operatorname{tg} C = -4{,}4521$
$C = 102°40'$

Контроль:

$\operatorname{ctg} B = -1{,}58645$
$\operatorname{ctg} C = -0{,}22461$
$\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = 0{,}35634$
$\cos a = 0{,}35634$

Контроль полностью сошелся.

Ответ: $a = 69°07'$, $B = 147°47'$ и $C = 102°40'$.

Задача 2. Решение прямоугольного сферического треугольника по гипотенузе и катету.

Пусть *дано*:	Требуется *найти*:
$a = 83°04'$,	c, B и C.
$b = 142\,17.$	

Приближенное решение дает $C \approx 96°$, $c \approx 100°$ (для их определения целесообразнее использовать косинус) и $B \approx 142°$ (для его определения удобнее синус).

По правилу Непера — Модюи для угла C по пятой формуле группы (65) находим

$$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} (90° - b), \text{ или } \cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}.$$

Для угла B по четвертой формуле группы (64) пишем

$$\cos (90° - b) = \sin a \sin B, \text{ или } \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Для стороны c по первой формуле группы (64) имеем

$$\cos a = \sin (90° - b) \sin (90° - c), \text{ или } \cos c = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Для контроля применяем третью формулу группы (64), соединяющую все три найденные величины:

$$\cos C = \sin B \sin (90° - c) = \sin B \cos c.$$

Решение.

Вычисление угла C:	Вычисление угла B:
$\operatorname{tg} b = -0{,}77335$	$\sin b = 0{,}61176$
$\operatorname{tg} a = 8{,}2234$	$\sin a = 0{,}99269$
$\cos C = -0{,}09404$	$\sin B = 0{,}61626$
$C = 95°24'$	$B_1 = 38°03'$.
	$B_2 = 141\,57$

Анализ. Поскольку для угла B получено два значения, необходимо определить, какое из этих значений удовлетворяет условиям существования сферического треугольника. По пятому условию, если $a + b > 180°$,

то и $A + B$ должно быть больше 180°. Мы имеем:

$$a + b = 225°21' > 180°,$$
$$A + B_1 = 128\,03 < 180,$$
$$A + B_2 = 231\,57 > 180.$$

Отсюда видно, что величина B_1 не удовлетворяет условию существования сферического треугольника, и решением является B_2.

Для того чтобы сферический треугольник был возможен, необходимо, чтобы $\sin B$ был меньше единицы, а $\cos c$ и $\cos C$ были меньше единицы, но больше -1. Это возможно тогда, когда $\sin a > \sin b$, $\operatorname{tg} a > |\operatorname{tg} b|$ и $|\cos b| > \cos a$, что равнозначно требованию, чтобы гипотенуза a была меньше катета c, но больше его дополнения до 180°, если c лежит во второй четверти, или больше катета c, но меньше его дополнения до 180°, если c лежит в первой четверти. Как мы видим, это условие выполняется.

Вычисление стороны c:	Контроль:
$\cos a = 0{,}12071$	$\sin B = 0{,}61626$
$\cos b = -0{,}79105$	$\cos c = -0{,}15259$
	$\sin B \cos c = -0{,}09404$
$\cos c = -0{,}15259$	$\cos C = -0{,}09404$
$c = 98°47'$	Контроль полностью сошелся.

Ответ. $c = 98°47'$, $B = 141°57'$, $C = 95°24'$.

Задача 3. Решение прямоугольного сферического треугольника по катету и противолежащему углу.

Пусть *дано*: $b = 38°28'$, $B = 56\,00$. Требуется *найти*: a, c и C.

Приближенное решение дает $a \approx 48°$, $c \approx 32°$ и $C \approx 45°$. Все угловые величины достаточно удалены от 0 или 90°, поэтому для их определения мы можем применять любые формулы.

По правилу Непера — Модюи находим из формул группы (64) для определения a

$$\cos(90^\circ - b) = \sin a \sin B, \text{ или } \sin a = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Из формул групп (65) и (64) для определения B и C

$$\cos(90^\circ - c) = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}(90^\circ - b), \text{ или } \sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B},$$

$$\sin(90^\circ - b)\sin C = \cos B, \text{ или } \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

Для существования сферического треугольника необходимо, чтобы синусы искомых элементов были больше нуля и меньше единицы. Для этого требуется, чтобы, когда b лежит в первой четверти, удовлетворялось неравенство $b<B<90^\circ$, а когда b лежит во второй четверти, неравенство $180^\circ - b<B<b$. Кроме того, из формулы для вычисления C вытекает требование, чтобы $\sin C$ был больше нуля. Поэтому необходимо, чтобы B и b лежали в одной четверти. Последнее обстоятельство вносит ограничение в последнее неравенство, превращая его в $90^\circ<B<b$.

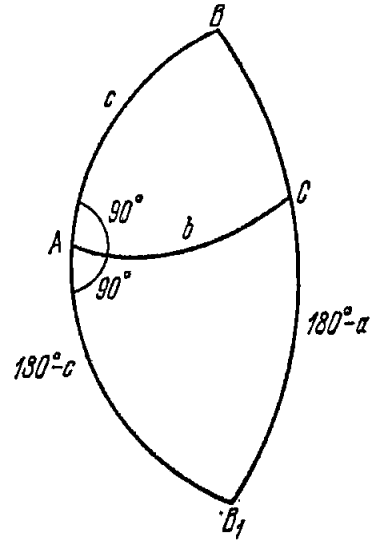

Рис. 48.

Решение, в котором аргумент получается по синусу, дает два значения неизвестной величины. В данном случае все три неизвестных имеют по паре решений, определяющих два сферических треугольника с заданными углами B и стороной b (рис. 48). Второй сферический треугольник получим, если продолжим стороны a и c до образования двуугольника BAB_1C. Угол B_1 при этом будет равен углу B, а стороны равны $180^\circ - a$ и $180^\circ - c$.

Для контроля применим последнюю формулу группы (64)

$$\cos(90^\circ - c) = \sin a \sin C, \text{ или } \sin c = \sin a \sin C.$$

Решение.

Вычисление гипотенузы a:

$\sin b = 0{,}62206$

$\sin B = 0{,}82904$

$\sin a = 0{,}75034$

$a_1 = 48°37'$

$a_2 = 131\,23$

Вычисление угла C:

$\cos B = 0{,}55919$

$\cos b = 0{,}78297$

$\sin C = 0{,}71419$

$C_1 = 45°35'$

$C_2 = 134\,25$

Вычисление катета c:

$\operatorname{tg} b = 0{,}79449$

$\operatorname{tg} B = 1{,}48256$

$\sin c = 0{,}53589$

$c_1 = 32°24'$

$c_2 = 147\,36$

Контроль:

$\sin a = 0{,}75034$

$\sin C = 0{,}71419$

$\sin a \sin C = 0{,}53588$

$\sin c = 0{,}53589$

Контроль сошелся нормально.

Анализ. Из рис. 44 следует, что сферический треугольник образуется либо при комбинации сторон a_1, b и c_1, либо a_2, b и c_2. При этом угол C определяется в соответствии с шестым условием существования сферического треугольника: если разность двух сторон больше, равна или меньше нуля, то и разность двух противолежащих им углов больше, равна или меньше нуля. У нас имеется:

$$b - c_1 = 6°04' > 0,$$

$$b - c_2 = -109°08' < 0,$$

$$B - C_1 = 10°25' > 0,$$

$$B - C_2 = -78°25' < 0.$$

Эти неравенства говорят о том, что значение C_1 соответствует прямоугольному сферическому треугольнику со сторонами a_1, b и c_1, а значение C_2 — прямоугольному сферическому треугольнику со сторонами a_2, b, c_2.

Ответ. Прямоугольный сферический треугольник ABC:

$$a_1 = 48°37', \quad c_1 = 32°24' \text{ и } C_1 = 45°35'.$$

Прямоугольный сферический треугольник AB_1C:

$$a_2 = 131°23', \quad c_2 = 147°36' \text{ и } C_2 = 134°25'.$$

Для решения прямоугольного сферического треугольника по катету и прилежащему углу, по гипоте-

нузе и углу и по двум углам пользуются формулами, найденными по правилу Непера — Модюи, аналогично уже рассмотренным. Осуществить эти решения практически мы предоставляем читателю.

§ 23. Построение треугольников на сфере

При решении ряда задач сферической тригонометрии требуется построить сферический треугольник непосредственно на сфере, например, на небесном или земном глобусе. Поэтому рассмотрим несколько вариантов построения на сфере. Примем, что построения производятся на сфере произвольного радиуса, а все элементы выражены в угловой мере.

Не исчерпывая всех возможных случаев построения на сфере, ограничимся только несколькими, дающими представление о подходе к решению этого рода задач.

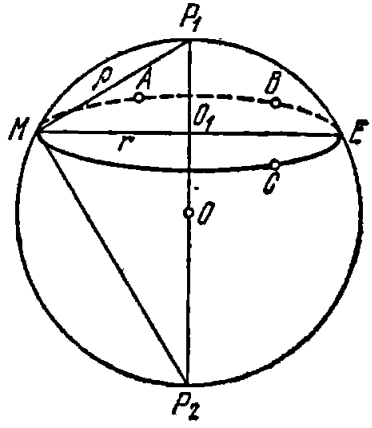

Рис. 49.

Задача 1. Построить плоский радиус окружности, начерченной на сфере. Пусть дана сфера произвольного, но неизменного и конечного радиуса (рис. 49). Поставив ножку циркуля в некоторую точку сферы, которую примем за полюс P_1, проведем окружность малого круга ME. Расстояние P_1M между ножками циркуля является сферическим радиусом ρ окружности малого круга, а расстояние MO_1 — плоским радиусом r малого круга.

Выберем на окружности ME три произвольные, но достаточно удаленные друг от друга по окружности точки A, B и C. Измерим циркулем расстояния AB, BC и CA. Нанесем эти расстояния на лист миллиметровой бумаги и построим по ним плоский треугольник. В случае, если сфера имеет большой радиус, то эти расстояния нужно пропорционально уменьшить.

Построим по правилам геометрии на плоскости описанную окружность вокруг этого плоского треугольни-

ка. Ее радиус r и будет искомым радиусом нашей окружности малого круга.

Задача 2. Построить и определить радиус R данной сферы. Опишем произвольным сферическим радиусом $\rho = MP_1$ окружность на сфере и, как в задаче 1, найдем ее плоский радиус r.

Построим плоский прямоугольный треугольник P_1MP_2 (см. рис. 49), один катет которого MP_1 равен сферическому радиусу ρ, а высота, опущенная на гипотенузу, равна плоскому радиусу r. Найденная по построению гипотенуза P_1P_2 будет равна диаметру нашей сферы. Следовательно, $R = P_1P_2/2$.

Задача 3. Построить на сфере треугольник, если даны три его стороны a, b и c. Прежде всего найдем, как в задаче 2, радиус данной сферы R и опишем им на листе миллиметровой бумаги окружность, соответствующую окружности большого круга на сфере. Отметим на ней отрезки A_1B_1, B_1C_1 и C_1D_1; соответственно равные данным сторонам c, b и a сферического треугольника (рис. 50). Измерив циркулем хорду A_1B_1 дуги c, отметим на сфере две точки A и B, расстояние между которыми равно $AB = c$. Дуга AB большого круга равна стороне c, так как равным хордам одной окружности соответствуют равные углы.

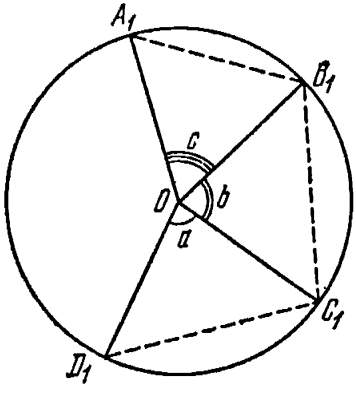

Рис. 50.

Теперь на сфере опишем сферическим радиусом B_1C_1 окружность из центра A и сферическим радиусом C_1D_1 — окружность из центра B. Эти окружности пересекутся на сфере в двух точках C и C_*. Проведя через точки A, B, C, а также через точки A, B, C_* на сфере окружности больших кругов, получим два сферических треугольника ABC и ABC_*, одинаково удовлетворяющих условию данной задачи. Соответственные элементы обоих треугольников попарно равны, но они симметричны и поэтому не могут быть совмещены.

Задача 4. Построить на сфере треугольник по данным его углам A, B, C. Согласно

§ 6 дополнения данных углов A, B, C до 180° равны сторонам полярного данному треугольнику ABC сферического треугольника A_1B_1C. Построим, в соответствии с задачей 3, сферические треугольники $A_1B_1C_1$ по его сторонам $180° - A$, $180° - B$ и $180° - C$, а также полярный ему искомый треугольник ABC. Вершину A последнего найдем, построив полюсы большого круга, проходящего через точки B_1 и C_1 на сфере, а вершины B и C установим, построив полюсы больших кругов A_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Наконец, выбираем три полюса из шести построенных, которые не лежат на тех же полушариях, что и соответственные им вершины полярного искомому треугольника $A_1B_1C_1$ (т. е. выбираем A на полушарии, не содержащем A_1, и т. д.).

Задача 5. Построить на сфере треугольник по данным двум его сторонам a, b и углу C между ними. Определим (по задаче 2) радиус R сферы и опишем им на плоскости окружность большого круга. На ней отметим дуги, равные a, b, C. Затем на сфере строим две точки P и Q, расстояние между которыми по прямой равно хорде, соответствующей дуге C. Сферическим радиусом ρ, равным $R\sqrt{2}$, описываем из точек P и Q на сфере окружности, которые пересекутся в некоторой точке C. Из точки C через точки P и Q проводим большие круги, угол между плоскостями которых равен C. Далее из точки C радиусом, равным хорде, соответствующей дуге b, опишем на сфере окружность, которая в некоторых точках A_1 и A пересечет большие круги, проходящие через P и Q. Сделаем также построение и для дуги a и получим точки B_1 и B пересечения построенной окружности с большими кругами, проходящими соответственно через точки P и Q. Наконец, соединив дугами большого круга точки A и B, а также A_1 и B_1, получим сферические треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, соответствующие условиям задачи. Сходные элементы этих треугольников равны, а сами треугольники будут симметричны.

Решение каждой из задач 3, 4, 5 приводит к построению двух сферических треугольников, сходные элементы которых равны. Сами же треугольники располагаются на сфере симетрично и поэтому несовместимы друг с другом. Другие задачи решаются либо аналогично, либо методом полярных треугольников.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

I. Исследование треугольников.

А. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, если известны его элементы (если невозможен, то почему?):

1. $B = 22°37'35''$, $C = 137°28'19''$?
2. $B = 172\,54\,20$, $C = 35\,45\,30$?
3. $B = 147\,38\,29$, $C = 126\,19\,37$?
4. $B = 18\,37\,29$, $b = 78\,35\,43$?
5. $B = 173\,59\,25$, $b = 165\,40\,10$?
6. $B = 47\,38\,29$, $C = 26\,19\,37$?
7. $b = 58\,39\,17$, $a = 49\,27\,56$?
8. $b = 158\,39\,17$, $a = 149\,27\,56$?
9. $B = 118\,37\,29$, $b = 78\,35\,43$?
10. $b = 48\,54\,54$, $c = 12\,16\,42$?

Б. Возможен ли сферический треугольник, у которого:

11. $a = 30°05'$, $b = 70°09'$ и $A = 40°07'$?

II. Решите сферические треугольники, если даны

А. Три стороны:

12. $a = 79°33'20''$, $b = 65°28'20''$, $c = 37°52'40''$.
13. $a = 100°00'00''$, $b = 80°00'00''$, $c = 60°00'00''$.

Б. Три угла:

14. $A = 107°45'34''$, $B = 69°41'40''$, $C = 131'09°18''$.
15. $A = 114°19'40''$, $B = 130°42'45''$, $C = 131°54'37''$.

В. Две стороны и угол между ними:

16. $a = 96°00'00''$, $b = 80°00'00''$, $C = 100°00'00''$.
17. $b = 112°57'10''$, $c = 86°03'13''$, $A = 56°03'00''$.

Г. Два угла и сторона между ними:

18. $a = 64°02'41''$, $B = 22°48'09''$, $C = 106°43'40''$.
19. $b = 22°04'47''$, $A = 74°32'10''$, $C = 61°09'30''$.

Д. Две стороны и угол, лежащий против одной из них:

20. $a = 20°16'38''$, $b = 56°19'40''$, $A = 20°09'55''$.
21. $a = 31°02'00''$, $b = 40°07'00''$, $A = 21°10'00''$.

Е. Два угла и сторона, лежащая против одного из них:

22. $A = 46°37'36''$, $B = 109°29'18''$, $a = 40°53'24''$.
23. $A = 59°30'40''$, $B = 73°13'22''$, $a = 61°05'12''$.

III. Решите прямоугольные сферические треугольники, если даны:

24. Гипотенуза и катет: $a = 61°07'08''$, $b = 33°18'17''$.
25. Гипотенуза и катет: $a = 32°08'00''$, $b = 23°50'48''$.
26. Два катета: $b = 50°00'00''$, $c = 52°55'26''$.
27. Два катета: $b = 57°13'00''$, $c = 98°47'00''$.
28. Катет и противолежащий угол: $b = 35°03'00''$, $B = 49°07'00''$.
29. Катет и противолежащий угол: $b = 108°41'36''$, $B = 102°35'40''$.
30. Катет и прилежащий угол: $b = 28°07'10''$, $C = 8°19'25''$.
31. Катет и прилежащий угол: $b = 64°30'09''$, $C = 132°44'57''$.
32. Гипотенуза и угол: $a = 87°16'00''$, $C = 76°57'43''$.
33. Гипотенуза и угол: $a = 120°38'43''$, $C = 135°05'16''$.
34. Два угла: $B = 70°05'02''$, $C = 140°10'04''$.
35. Два угла: $B = 13°19'00''$, $C = 87°16'00''$.

IV. Другие случаи решения сферических треугольников

А. Узкие сферические треугольники:

36. Дано: $b = 30°00'00''$, $c = 1°00'00''$, $A = 45°00'00''$. Найти сторону a и угол C.
37. Дано: $A = 50°00'00''$, $b = 40°00'00''$, $c = 0°48'06''$. Решить узкий сферический треугольник.

Б. Дифференциальные соотношения:

38. Дано: $a = 40°42'23''$, $A = 52°17'54''$, $dA = 0°20'13''$. Найти da.

В. Сферический избыток:

39. Дано: $a = 35°41'28''$, $b = 56°16'40''$, $c = 29°18'10''$. $C = 29°47'01''$, найти сферический избыток.
40. Дано: $a = 36°14'28''$, $b = 128°17'22''$, $c = 107°15'55''$. $C = 132°20'34''$, найти сферический избыток.

Ответы.

I. 1. Невозможен. 2. Невозможен. 3. Невозможен. 4. Невозможен. 5. Невозможен. 6. Невозможен. 7. Невозможен. 8. Возможен. 9. Невозможен. 10. Возможен. 11. Невозможен.

II. 12. $A = 105°11'38''$, $B = 63°13'16''$, $C = 37°02'58''$ (6 зн.)

13. $A = 107°46'58''$, $B = 72°13'02''$, $C = 56°51'48''$ (6 зн.)

14. $a = 139°03'28''$, $b = 40°11'24''$, $c = 148°47'47''$ (6 зн.)

15. $a = 87°35'20''$, $b = 123°47'10''$, $c = 125°18'52''$ (6 зн.)

16. $A = 94°15'35''$, $B = 80°55'48''$, $c = 100°50'57''$ (6 зн.)

17. $B = 119°03'34''$, $C = 71°16'00''$, $a = 60°54'34''$ (6 зн.)

18. $b = 22°40',6$, $c = 72°18',0$, $A = 64°40',5$ (5 зн.)

19. $a = 28°36',4$, $c = 25°47',8$, $B = 49°10',3$ (5 зн.)

Может быть два, одно или ни одного решения. Исследуйте.

20. $B = 55°52'30''$, $C = 114°20'16''$, $c = 66°20'44''$ (6 зн.)

и $B = 124\ 07\ 30$, $C = 42\ 38\ 40$, $c = 42\ 55\ 36$ (6 зн.)

21. $B = 26°49'38''$, $C = 140°04'35''$, $c = 66°23'21''$ (6 зн.)

и $B = 153\ 10\ 22$, $C = 6\ 56\ 05$, $c = 9\ 55\ 36$

22. $b = 58°06',0$, $c = 31°41',8$, $C = 35°41',47$ (5 зн.)

и $b = 121\ 54,0$, $c = 116\ 04,4$, $C = 94\ 08,0$

23. $b = 76°33',0$, $C = 100°23',4$, $c = 92°55',5$ (5 зн.)

и $b = 103\ 27,0$, $C = 143\ 30,2$, $c = 142\ 49,8$

III. 24. $C = 68°45'9''$, $B = 38°50',1$, $c = 54°41',8$ (5 зн.)

25. $c = 22°12',0$, $B = 49°28',4$, $C = 45°16',3$ (5 зн.)

26. $a = 67°12'00''$, $B = 56°11'56''$, $C = 59°56'10''$ (6 зн.)

27. $a = 94°44'34''$, $B = 57°31'24''$, $C = 97°24'05''$ (6 зн.)

Может быть два, одно или ни одного решения. Исследуйте.

28. $a = 49°25'44''$, $c = 37°23'43''$, $C = 53°05'00''$

и $a = 130\ 34\ 16$, $c = 142\ 36\ 17$, $C = 126\ 55\ 00$ (6 зн.)

29. $c = 41°19',5$, $a = 103°55',7$, $C = 42°52'09''$ (5 зн.)

и $c = 138\ 40,5$, $a = 76\ 04,3$, $C = 137\ 07\ 51$

30. $a = 28°22'20''$, $c = 3°56'41''$, $B = 82°39'53''$ (6 зн.)

31. $a = 107°56'18''$, $c = 135°40'57''$, $B = 71°34'20''$ (6 зн.)

32. $b = 78°03'04''$, $c = 76°41'00''$, $B = 78°21'49''$ (6 зн.)

33. $c = 142°35'49''$, $b = 50°05'04''$, $B = 63°03'43''$ (6 зн.)

34. $a = 115°44'42''$, $b = 57°52'21''$, $c = 144°45'47''$ (6 зн.)

35. $a = 78°21'49''$, $b = 13°02'17''$, $c = 78°03'04''$ (6 зн.)

IV. 36. $1a = 29°18'02'',28$ $C = 1°26'41'',81$ (7 зн.)

37. $B = 129°15'23''$, $a = 40°00'14''$, $C = 0°57'56'',7$ (6 зн.)

38. $da = 13'26'',6$ (4 зн.) 39. $\varepsilon = 8°30'40''$ (5 зн.)

40. $\varepsilon = 50°14'03''$ (5 зн.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Серре Ж., Сферическая тригонометрия, пер. с франц. М. В. Пирожкова, Спб., 1902.
2. Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. 2, «Матезис», Одесса, 1910.
3. Глазенап С. П., Тригонометрия, (часть III — решение сферических треугольников, ГИЗ, М.— П., 1923.
4. Гассенберг Г., Сферическая тригонометрия и сборник задач, библиотека Гашен, Берлин — Рига, 1923.
5. Дитц О. Г., Записки по сферической тригонометрии, М., 1930.
6. Кранц П., Сферическая тригонометрия, ГТТИ, М.—Л., 1932.
7. Вентцель М. К., Сферическая тригонометрия, Геодезиздат, М., 1948.
8. Степанов Н. Н., Сферическая тригонометрия, Гостехиздат, изд. 2-е, М.— Л., 1948.
9. Блажко С. Н., Курс сферической астрономии, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1954.
10. Астрономический календарь. Постоянная часть, изд. 6-е, «Наука», М., 1973.
11. Вульф Г. В., Способ графического решения задач по космографии и математической географии. Нижний Новгород, 1909.
12. Волынский Б. А., Элементы сферической тригонометрии, Учпедгиз, М., 1961.

Борис Алексеевич Волынский

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

М., 1977 г., 136 стр. с илл.

Редактор *Г. С. Куликов*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *Л. С. Сомова*

Сдано в набор 08.02.1977 г. Подписано к печати 30.05.1977 г. Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 4,25 п. л.+ +1 вкл.(0,125 п. л.) Условн. печ. л. 7,35. Уч.-изд. л. 6,21. Тираж 17000 экз. Т-08471. Цена книги 20 коп. Заказ № 443

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25